UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
LABORATORIJ ZA MATEMATIČNE METODE
V RAČUNALNIŠTVU IN INFORMATIKI

Aleksandra Franc, Damir Franetič

REŠENE NALOGE IZ DISKRETNIH STRUKTUR

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2024

Rešene naloge iz Diskretnih struktur
Študijsko gradivo za predmet *Diskretne strukture (63xxx)*
Aleksandra Franc, Damir Franetič
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 30. september 2024

Uvod

Naloge na naslednjih straneh so prirejene iz nalog, ki so se pojavljale na kolokvijih pri predmetu Diskretne strukture za študente univerzitetnega študija računalništva in informatike na FRI med leti 2011 in 2018. Ponavljanju nalog, ki jih rešujemo na vajah, sva se skušala izogniti, ker se zdi tako podvajanje nepotrebno. Nalog z vaj v tej zbirki torej ni, razen nekaj redkih izjem, ki so se s kolokvijev z leti preselile na vaje.

Pri sestavljanju nalog za kolokvije so sodelovali številni asistenti, ki so na FRI poučevali ali še poučujejo ta predmet, za kar se jim iskreno zahvaljujeva.

Dragi študenti. To študijsko gradivo ni recenzirano in gotovo so se v rešitve nalog prikradle napake. Če mislite, da je kakšna rešitev napačna, ste vabljeni, da se oglasite na govorilnih urah.

Za lažjo navigacijo po dokumentu so na voljo bližnjice. Če kliknete na simbol ⇩ ob nalogi, boste skočili do rešitve. Če kliknete na simbol ⇧ ob rešitvi, se boste vrnili k besedilu naloge. Vseeno priporočava, da nalogi posvetite nekaj časa, preden se lotite branja rešitve.

Oznake

p, q, r	...	izjavne spremenljivke
$\neg p$	...	negacija, ne p
$p \wedge q$	...	konjunkcija, p in q
$p \vee q$	...	disjunkcija, p ali q
$p \Rightarrow q$	...	implikacija, iz p sledi q
$p \Leftrightarrow q$	...	ekvivalenca, iz p sledi q
$p \veebar q$	...	ekskluzivni ali, ali p ali q
$p \uparrow q$	...	Schefferjev veznik, nand, ne (p in q)
$p \downarrow q$	...	Peirceov veznik, nor, ne (p or q)
$\mathbb{N}$	...	množica naravnih števil
$\mathbb{Z}$	...	množica celih števil
$\mathbb{P}$	...	množica praštevil
$A \cup B$	...	unija množic A in B
$A \cap B$	...	presek množic A in B
$A \setminus B$	...	simetrična razlika množic A in B
A^c	...	komplement množice A
$\mathcal{U}$	...	univerzalna množica
$\emptyset$	...	prazna množica
$\lvert A \rvert$	...	moč množice A
$\gcd(a,b)$	...	največji skupni delitelj števil a in b
$\mathrm{lcm}(a,b)$	...	najmanjši skupni večkratnik števil a in b
$\lfloor a \rfloor$	...	celi del števila a

Kazalo

POGLAVJE 1

Izjavni račun

Naloga 1.
Po tekmi se navijači Simon, Urban, Tomaž in Zoran v krčmi pri Veseli Ani dogovarjajo, kdo bo šel v Južno Afriko. Ko jim prinese pijačo, vesela Ana sliši naslednje ugotovitve:

- Če bo šel v Južno Afriko Zoran ali Urban, potem bo šel tudi Simon, ampak Tomaž bo ostal doma.
- Če gre Urban v Južno Afriko, potem gresta tudi Zoran in Tomaž.
- Če gre v Južno Afriko Tomaž, bo doma ostal Simon ali pa Zoran.

Vesela Ana pravi: ”Urban, ti boš ostal doma."Ali je sklepala pravilno?

Naloga 2.
Primož, Robert, Samo in Tilen se pogovarjajo, kdo že ima opravljen izpit iz DS. Ugotovijo naslednje:

- Primož ima opravljen izpit natanko tedaj, ko ga Robert nima.
- Če ima Robert opravljen izpit, potem ga ima tudi Tilen.
- Če ima opravljen izpit Primož ali Robert, potem ga ima tudi Samo.
- Bodisi ima Robert opravljen izpit, bodisi ga Samo nima.

Kdo od teh štirih študentov še nima opravljenega izpita iz DS?

Naloga 3.
Poišči vse izjavne izraze X odvisne od p in q, za katere je izraz

$$\neg(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow X)) \vee p \wedge q$$

tavtologija. Ali obstaja tak izraz X, da bo zgornji izraz protislovje?

Naloga 4.
Poišči vse izjavne izraze X odvisne od p in q, za katere je izraz

$$\neg p \wedge X \vee q \wedge \neg(p \Leftrightarrow X)$$

protislovje. Ali obstaja tak izraz X, da bo zgornji izraz tavtologija?

Naloga 5.
Dvomestni izjavni veznik $\not\Rightarrow$ definiramo kot $p \not\Rightarrow q \equiv \neg(p \Rightarrow q)$.

a. Zapiši resničnostno tabelo veznika $\not\Rightarrow$.
b. Zapiši izjavne izraze $\neg p$, $p \vee q$ in $p \Leftrightarrow q$ z uporabo veznikov $\Rightarrow$ in $\not\Rightarrow$.
c. Kateri od naborov $\{\Rightarrow, \not\Rightarrow\}$, $\{\vee, \not\Rightarrow\}$ in $\{\Leftrightarrow, \not\Rightarrow\}$ so polni nabori izjavnih veznikov?

Naloga 6.
Dvomestni veznik $\not\Leftarrow$ definiramo kot negacijo nasprotne implikacije,

$$p \not\Leftarrow q \equiv \neg(q \Rightarrow p).$$

a. Ali je $\{\not\Leftarrow\}$ poln nabor?
b. Ali je $\{\not\Leftarrow, \Rightarrow\}$ poln nabor?

c. Izrazi $\wedge$ in $\vee$ samo z veznikoma $\not\Leftarrow$ in $\Rightarrow$.

Naloga 7.
Dan je nabor logičnih veznikov $\{\veebar, \Rightarrow\}$.

a. Izrazi in zapiši 1 in $p \Leftrightarrow q$ samo z uporabo $\veebar$ in $\Rightarrow$.
b. Dokaži, da je $\{\veebar, \Rightarrow\}$ poln nabor.

Naloga 8.
Dvomestna izjavna veznika # in $\star$ sta definirana s predpisoma

$$p\#q \;\equiv\; \neg p \wedge q \quad \text{in} \quad p \star q \;\equiv\; p \wedge \neg q.$$

a. Izrazi $p \wedge q$ samo z veznikom # in logično konstanto 1.
b. Kateri od naborov $\{\#\}$, $\{0, \#\}$, $\{\wedge, \vee, \#\}$, $\{\neg, \#\}$ so polni?
c. Kateri od naborov $\{\star\}$, $\{1, \star\}$, $\{\#, \star\}$, $\{\neg, \star\}$ so polni?

Naloga 9.
Tromestni izjavni veznik A je dan s predpisom

$$A(p, q, r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge r.$$

a. Poišči vse izjavne izraze X (v odvisnosti od p in q), za katere je $A(p, q, X)$ protislovje.
b. Če lahko le z uporabo A izraziš kateregakoli od zgornjih X, potem lahko le z uporabo A izraziš protislovje. Dokaži.
c. Pokaži, da se z A ne da izraziti protislovja.

Naloga 10.
Dan je tromestni izjavni veznik $A(p, q, r) \equiv p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r)$.

a. Zapiši izjavne izraze 1, $p \Rightarrow q$ in $p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ le z uporabo veznika A.
b. Kateri od naborov $\{A\}$, $\{A, 0\}$, $\{A, \wedge\}$, $\{A, \Rightarrow\}$ in $\{A, \neg\}$ so polni?

Naloga 11.
Dan je tromestni izjavni veznik $A(p, q, r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.

a. Izrazi konstanto 1 in implikacijo $p \Rightarrow q$ z uporabo samo veznika A.
b. Izrazi $p \wedge q$ ter $p \vee q$ z uporabo veznikov A in $\neg$.
c. Ali je kateri od naborov $\{A\}$, $\{A, 1\}$, $\{A, 0\}$, $\{A, \neg\}$ poln?

Naloga 12.
Tromestni izjavni veznik A definiramo z naslednjim opisom

$$A(p, q, r) \equiv p \vee \neg(q \wedge r)$$

a. Ali lahko z vezniki nabora $\{A, 1\}$ izraziš ekskluzivno disjunkcijo? Kako (na čim krajši način) oziroma zakaj ne?
b. Ali lahko z vezniki nabora $\{A, 1\}$ izraziš implikacijo? Kako (na čim krajši način) oziroma zakaj ne?
c. Kateri izmed naborov

$$\{A\},\ \{A, 1\},\ \{A, 0\},\ \{A, \Leftrightarrow\},\ \{A, \veebar\},\ \{A, \neg\}$$

so polni in kateri ne?

Naloga 13.
Dan je tromestni izjavni veznik $A(p, q, r) \equiv p \Rightarrow q \vee \neg r$.

a. Izrazi implikacijo $\Rightarrow$ samo z uporabo veznika A.

b. Kateri od naborov $\{A\}$, $\{A, \Rightarrow\}$, $\{A, \neg\}$, $\{A, \veebar\}$, $\{A, \vee\}$ so polni?

NALOGA 14.
Dan je tromestni izjavni veznik $A(p,q,r) \equiv p \wedge q \Rightarrow p \wedge r$.

(a) Ali je $\{A\}$ poln nabor?
(b) Kateri od naborov $\{A, 0\}$, $\{A, 1\}$, $\{A, \neg\}$ so polni?

NALOGA 15.
Dan je tromestni izjavni veznik $A(p,q,r) \equiv p \vee r \Rightarrow p \wedge q \wedge r$.

a. Izrazi implikacijo $p \Rightarrow q$ in ekvivalenco $p \Leftrightarrow q$ samo z uporabo veznika A.
b. Izrazi A samo z vezniki $\neg$, $\vee$, $\wedge$.
c. Kateri izmed naborov $\{A\}$, $\{1, A\}$, $\{A, \neg\}$ so polni in kateri ne?

NALOGA 16.
Tromestni logični vezik A je dan z opisom:

$A(p,q,r)$ je resničen takrat, ko sta en ali dva izmed p,q in r resnična.

a. Izrazi $A(p,q,r)$ le z uporabo veznikov $\neg$, $\wedge$ in $\vee$.
b. Izrazi veznik $\vee$ le z uporabo A.
c. Kateri izmed naborov $\{A, \vee\}$, $\{A\}$, $\{A, \neg\}$ in $\{A, \Rightarrow\}$ so polni nabori?

NALOGA 17.
Naj bo A tromestni izjavni veznik definiran z $A(p,q,r) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg r)$.

a. Kateri izmed naborov $\{A\}$, $\{A, \wedge\}$, $\{A, 1\}$, $\{A, 0\}$ so polni?
b. Zaporedje A_n je definirano rekurzivno z

$$\begin{aligned} A_1 &= p \\ A_2 &= \neg p \\ A_n &= A(A_{n-1}, 0, A_{n-2}) \end{aligned}$$

Izračunaj A_{2018}.

NALOGA 18.
Tromestni izjavni veznik V je dan z opisom: Izraz $V(p,q,r)$ je resničen natanko tedaj, ko imata natančno dva izmed p, q in r isto logično vrednost.

a. Zapiši resničnostno tabelo za $V(p,q,r)$.
b. Z uporabo veznikov V in $\Leftrightarrow$ zapiši izjavna izraza $p \vee q$ ter $\neg p \vee \neg q$.
c. Kateri izmed naštetih naborov izjavnih veznikov so polni nabori:

$$\{V\}, \{V, 0\}, \{V, 1\}, \{V, \wedge\}, \{V, \vee\}, \{V, \Leftrightarrow\}?$$

NALOGA 19.
Tromestni izjavni veznik C je dan s predpisom

$$C(p,q,r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r).$$

a. Zapiši $C(p,q,r)$ v konjunktivni in disjunktivni normalni obliki.
b. Z uporabo C in logične konstante 1 zapiši izjavne izraze $p \wedge q$, $p \vee q$ ter $p \Rightarrow q$.
c. Kateri od naborov $\{C\}$, $\{C, 1\}$, $\{C, 0, 1\}$, $\{C, 0, \wedge\}$ in $\{C, \neg\}$ so polni nabori izjavnih veznikov?

Naloga 20.
Ali je sklep

$$p \Rightarrow t \vee r, \quad q \Rightarrow t \vee s, \quad r \Rightarrow \neg s \quad \models \quad p \wedge q \Rightarrow t$$

pravilen? Če je pravilen, ga dokaži s pomočjo pravil sklepanja, če je napačen, poišči protiprimer.

Naloga 21.
Ali sta spodnja sklepa pravilna? Pravilne sklepe dokaži, za napačne pa poišči protiprimer.

$$\begin{aligned} p \veebar (q \wedge r), t \Rightarrow r \vee s, t \Leftrightarrow \neg r, q \Rightarrow \neg s, u \vee t \quad &\models \quad p, \\ p \veebar (q \wedge r), t \Rightarrow r \vee s, t \Leftrightarrow \neg r, q \Rightarrow \neg s, u \vee t \quad &\models \quad t \Rightarrow p. \end{aligned}$$

Naloga 22.
Eden od spodnjih sklepov je pravilen, drugi pa napačen. Pravilnega dokaži za napačnega pa poišči protiprimer.

$$\begin{aligned} p \vee q, \; p \Rightarrow \neg(r \vee s), \; t \vee \neg q \quad &\models \quad r \Rightarrow t, \\ p \vee q, \; p \Rightarrow \neg(r \vee s), \; t \vee \neg q \quad &\models \quad r \Rightarrow s. \end{aligned}$$

Naloga 23.
Prepričaj se, da sklep

$$\neg s \vee p, \; p \Rightarrow t, \; \neg q, \; r \Rightarrow t \quad \models \quad \neg r \wedge (s \Rightarrow t)$$

ni pravilen. Katerega od spodnjih izjavnih izrazov naj dodamo med predpostavke, da dobimo pravilen sklep:

$$q \Rightarrow t, \; q \Leftrightarrow t, \; t \Rightarrow r, \; t \Rightarrow \neg r?$$

Zapiši dokaz dobljenega pravilnega sklepa.

Naloga 24.
Ali je kateri od spodnjih sklepov pravilen? Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

$$\begin{aligned} p \vee q, \quad p \vee r \Rightarrow \neg q, \quad s \vee r \quad &\models \quad \neg p \Rightarrow s, \\ p \vee q \vee \neg t, \quad p \vee r \Rightarrow \neg q, \quad s \vee r \quad &\models \quad \neg p \Rightarrow t. \end{aligned}$$

Naloga 25.
Za vsakega od spodnjih sklepov ugotovi, če je pravilen. Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

$$\begin{aligned} p \vee q, \; r \wedge s, \; p \Rightarrow \neg r, \; \neg s \vee t \Rightarrow \neg q \quad &\models \quad \neg t, \\ p \vee q, \; r \wedge s, \; p \Rightarrow \neg r, \; \neg s \vee t \Rightarrow \neg q \quad &\models \quad t. \end{aligned}$$

Naloga 26.
Ali je sklep

$$p \wedge q \Rightarrow r \vee s, \; s \vee (\neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t)) \quad \models \quad \neg s \Rightarrow (\neg p \vee t)$$

pravilen? Kaj pa sklep

$$p \wedge q \Rightarrow r \vee s, \; s \vee (\neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t)) \quad \models \quad \neg s \Rightarrow (p \vee t)?$$

Pravilnega dokaži, za napačnega pa poišči protiprimer.

Naloga 27.
Ali je kateri od spodnjih sklepov pravilen? Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

$$\begin{aligned} (\neg t \vee q) \vee r, \; \neg t \Rightarrow \neg p, \; p \Rightarrow \neg r \quad &\models \quad p \Rightarrow q \vee s, \\ (\neg t \vee q) \vee r, \; \neg t \Rightarrow \neg p, \; p \Rightarrow \neg s \quad &\models \quad p \Rightarrow q \vee s. \end{aligned}$$

NALOGA 28.
Ali je kateri izmed sklepov

$$p \wedge (r \vee s),\quad (\neg t \vee r) \Rightarrow \neg p,\quad (s \wedge q) \Rightarrow (\neg t \vee u) \quad \models \quad q \Rightarrow u,$$
$$p \wedge (r \vee s),\quad (\neg t \vee r) \Rightarrow \neg p,\quad (s \wedge q) \Rightarrow (\neg t \vee u) \quad \models \quad u \Rightarrow q,$$

pravilen? Pravilne sklepe dokaži s pravili sklepanja, za napačne najdi protiprimer.

NALOGA 29.
Ali je sklep

$$\neg q \Rightarrow \neg p \vee r,\ q \Rightarrow \neg p,\ \neg(s \wedge r)\ \models\ (p \Rightarrow \neg s) \wedge (s \Rightarrow \neg p)$$

pravilen? Če je pravilen, ga dokaži s pomočjo pravil sklepanja, če je napačen, poišči protiprimer.

NALOGA 30.
Ali je sklep

$$p \vee t,\quad t \vee u \Rightarrow r \vee s,\quad t \Rightarrow \neg s \quad \models \quad p \vee r$$

pravilen? Kaj pa, če zaključek zamenjamo s p? Pravilen sklep dokaži s pomočjo pravil sklepanja, za napačnega poišči protiprimer.

NALOGA 31.
Dokaži pravilnost spodnjega sklepa z uporabo pravil sklepanja:

$$r \vee s \Rightarrow q \wedge r, r \vee s \vee t, \neg t \wedge r \Rightarrow p \ \models\ \neg t \Rightarrow p \wedge q.$$

NALOGA 32.
Ali je kateri izmed spodnjih sklepov pravilen?

$$r \Rightarrow q \vee t,\quad t \Rightarrow \neg p,\quad \neg q \vee \neg p,\quad p \Rightarrow r \quad \models \quad p,$$
$$r \Rightarrow q \vee t,\quad t \Rightarrow \neg p,\quad \neg q \vee \neg p,\quad p \Rightarrow r \quad \models \quad \neg p.$$

Poišči protiprimer ali pa dokaži s pomočjo pravil sklepanja.

NALOGA 33.
Ali je kateri od spodnjih sklepov pravilen? Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

a. $p \vee q,\ q \Rightarrow \neg r,\ \neg p \vee r,\ s \vee (p \Leftrightarrow q)\ \models\ s \vee \neg r,$
b. $p \vee q,\ q \Rightarrow \neg r,\ \neg p \Rightarrow r,\ p \veebar q,\ \neg(s \vee r)\ \models\ \neg q.$

NALOGA 34.
Dan je sklep

$$s \vee p,\ p \Rightarrow t,\ \neg q,\ r \Rightarrow t \quad \models \quad (r \vee s) \Rightarrow t.$$

a. Utemelji, da ta sklep *ni* pravilen. Zapiši protiprimer.
b. Katerega od spodnjih izjavnih izrazov naj dodamo med predpostavke, da dobimo pravilen sklep?

$$s \Rightarrow p \wedge q,\ p \Rightarrow q \wedge s,\ q \Rightarrow p \wedge s$$

Zapiši formalen dokaz dobljenega pravilnega sklepa.

NALOGA 35.
Dani sta predpostavki $P_1 = p \vee r$ in $P_2 = q \Rightarrow \neg p$ ter zaključki $Z_1 = p \wedge q$, $Z_2 = q \Rightarrow r$ in $Z_3 = \neg r$.

a. Kateri od spodnjih sklepov so napačni? Za vsak napačen sklep poišči protiprimer.

$$P_1,\ P_2 \quad \models \quad Z_1, \qquad P_1,\ P_2 \quad \models \quad Z_2 \quad \text{in} \quad P_1,\ P_2 \quad \models \quad Z_3.$$

b. Kateri od zgornjih sklepov so pravilni? Vsak pravilen sklep dokaži.
c. Za katero predpostavko P_3 bodo vsi spodnji trije sklepi pravilni?

$$P_1,\ P_2,\ P_3 \quad \models \quad Z_1, \qquad P_1,\ P_2,\ P_3 \quad \models \quad Z_2 \qquad \text{in} \qquad P_1,\ P_2,\ P_3 \quad \models \quad Z_3.$$

Naloga 36.
Dan je sklep

$$p \wedge \neg q \Rightarrow r,\ p \vee s,\ q \Rightarrow t,\ \neg t \quad \models \quad t \vee r.$$

a. Pokaži, da zgornji sklep ni pravilen.
b. Katero od predpostavk

$$P_1 = s \Rightarrow t, \quad P_2 = s \Rightarrow \neg t, \quad P_3 = \neg s \Rightarrow t, \quad P_4 = \neg s \Rightarrow \neg t$$

naj dodamo, da bomo dobili pravilen sklep? Dobljen pravilen sklep tudi formalno dokaži!

POGLAVJE 2

Predikatni račun

NALOGA 37.
Katera izmed spodnjih formul je splošno veljavna?

$$\begin{aligned} A &= \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \\ B &= \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \Rightarrow P(x)). \end{aligned}$$

Za vsako pokaži, da je splošno veljavna ali pa najdi interpretacijo, v kateri ima formula logično vrednost 0.

NALOGA 38.
Dani sta formuli

$$\begin{aligned} A &= \forall z \exists y\, (R(z,y) \vee \forall w \neg R(y,w)), \\ B &= \forall x \exists y\, R(x,y) \vee \exists x \forall y\, R(x,y). \end{aligned}$$

Ali sta enakovredni? Ali je katera od njiju splošno veljavna (tj. enakovredna logični konstanti 1)?

NALOGA 39.
Naj bosta P in R dvomestna predikata. Dane so izjavne formule:

$$\begin{aligned} A &= \exists x\, (\forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y\, R(x,y)), \\ B &= \exists x\, (\forall y\, P(y,x) \Rightarrow \forall y\, R(x,y)), \\ C &= \exists x\, (\forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y\, R(y,x)). \end{aligned}$$

a. Utemelji, da sta izjavni formuli A in B enakovredni.
b. Poišči interpretacijo, v kateri imata izjavni formuli A in C nasprotni logični vrednosti.

NALOGA 40.
Katere izmed spodnjih formul so med sabo enakovredne. Utemelji.

$$\begin{aligned} A &= \exists x\, (\forall y\, P(x,y) \Rightarrow \exists y\, R(x,y)), \\ B &= \exists y\, (\forall x\, P(x,y) \Rightarrow \exists x\, R(x,y)), \\ C &= \exists x \forall y\, P(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y\, R(x,y). \end{aligned}$$

NALOGA 41.
Katere izmed izjavnih formul

$$\begin{aligned} A &= \exists x\, (P(x) \vee Q(x)), \\ B &= \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x), \\ C &= \exists x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y), \end{aligned}$$

so enakovredne?

NALOGA 42.
Ali sta izjavni formuli A in B enakovredni? Kaj pa C in D?

$$\begin{aligned}
A &= \forall x \exists y\ (P(x) \wedge Q(x,y) \Rightarrow R(y)),\\
B &= \exists y \forall x\ (P(x) \wedge Q(x,y) \Rightarrow R(y)),\\
C &= \exists x \forall y\ (P(x) \wedge Q(y,y) \Rightarrow R(x)),\\
D &= \forall y \exists x\ (P(x) \wedge Q(y,y) \Rightarrow R(x)).
\end{aligned}$$

NALOGA 43.
Katere od izjavnih formul A, B, C in D so enakovredne in katere ne? Če je potrebno, poišči ustrezne interpretacije.

$$\begin{aligned}
A &= \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x),\\
B &= \neg \forall x\, (\neg P(x) \vee \neg Q(x)),\\
C &= \exists y\, P(y) \wedge \neg \forall x\, \neg Q(x),\\
D &= \neg(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)).
\end{aligned}$$

NALOGA 44.
Za izjavne formule A, B, C in D ugotovi, ali so paroma enakovredne. Če sta dve formuli enakovredni, to dokaži s preoblikovanjem po zakonih izjavnega in predikatnega računa, sicer pa poišči interpretacijo, v kateri se razlikujeta.

$$\begin{aligned}
A &= \exists x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vee \exists x\ (\neg P(x) \Rightarrow Q(x)),\\
B &= \exists x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)),\\
C &= \exists x\ P(x) \Rightarrow \exists x\ Q(x),\\
D &= 1.
\end{aligned}$$

NALOGA 45.
Dane so izjavne formule

$$\begin{aligned}
U &\equiv \forall y \exists x (P(x) \Rightarrow R(x,y)),\\
V &\equiv \forall y (\exists x P(x) \Rightarrow \exists x R(x,y)),\\
W &\equiv \forall y (\forall x P(x) \Rightarrow \exists z R(z,y)).
\end{aligned}$$

Kateri pari zgornjih izjavnih formul so enakovredni? Zakaj?

NALOGA 46.
Dane so izjavne formule

$$\begin{aligned}
A &= \forall z \exists x \forall y\ (Q(z) \Rightarrow P(x,y)),\\
B &= \exists x \forall y \forall z\ (Q(z) \Rightarrow P(x,y)),\\
C &= \forall y \forall z \exists x\ (Q(z) \Rightarrow P(x,y)).
\end{aligned}$$

a. Pokaži, da sta formuli A in B enakovredni.
b. Poišči interpretacijo s področjem pogovora $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, ki pokaže, da formuli A in C nista enakovredni.

POGLAVJE 3

Množice

NALOGA 47.
Ali velja enakost

$$(A+C)\cap B=(A\cup B)\setminus(A\cap C)?$$

Ali velja vsebovanost

$$(A+C)\cap B\subseteq(A\cup B)\setminus(A\cap C)?$$

NALOGA 48.
Ali velja enakost

$$A+B+C=(A+B)\cap C^c\ \cup\ (A+C)\cap B^c\ \cup\ (B+C)\cap A^c?$$

Kaj pa, če je $A\cap B\cap C=\varnothing$? Če velja enakost, jo dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

NALOGA 49.
Pokaži, da velja vsebovanost

$$(A\cap B)\times(C\cup D)\subseteq((A\times C)\cup(B\times D))\cap((A\times D)\cup(B\times C))$$

in ne velja enakost

$$(A\cap B)\times(C\cup D)=((A\times C)\cup(B\times D))\cap((A\times D)\cup(B\times C)).$$

Nato pokaži, da pri pogoju $A+B=\varnothing$ enakost velja.

NALOGA 50.
Pri poljubno izbranih množicah A,B,C definiramo tudi množici

$$L=(A\setminus B)\cup(B\cap C)\setminus A\qquad\text{in}\qquad D=A+(B\cap C).$$

a. Ali sta množici L in D enaki?
b. Ali velja $L\subseteq D$?
c. Denimo, da velja $A\cap B\subseteq C$. Ali v tem primeru velja enakost $L=D$?

NALOGA 51.
Za poljubne množice A, B in C definiramo še množice

$$M_1=A\setminus(B\cup C),$$
$$M_2=(A+B^c)\cap C,$$
$$M_3=(A+C^c)\cap B.$$

a. Pri katerih pogojih so množice M_1, M_2 in M_3 paroma disjunktne?
b. Utemelji, da velja $M_1\cup M_2\cup M_3=A+B+C$.

NALOGA 52.
Dane so množice

$$X=A+B+C,$$
$$Y=(A\setminus(B\cap C))\ \cup\ (B\setminus(C\cap A))\ \cup\ (C\setminus(A\cap B)),$$
$$Z=(A\setminus(B\cup C))\ \cup\ (B\setminus(C\cup A))\ \cup\ (C\setminus(A\cup B)),$$
$$W=((A\cup B)\setminus C)\ \cap\ ((B\cup C)\setminus A)\ \cap\ ((C\cup A)\setminus B).$$

a. Nariši Vennov diagram za vsako od teh štirih množic.
b. Ali je množica X enaka kateri od množic Y, Z, W? Dokaži ali poišči protiprimere.
c. Ali sta kateri od množic Y, Z, W enaki? Dokaži ali poišči protiprimere.

Naloga 53.
Pri katerih pogojih za množici A in B je rešljiv sistem neenačb z množicami

$$A \cup B \subseteq X \cap A,$$
$$X \cup A \subseteq X \cap B?$$

Kaj so rešitve?

Naloga 54.
Za dane množice A, B in C opazujemo spodnji sistem enačb z neznanko X.

$$A \cup X = B \cap X$$
$$B \cap X = A \cup C \cup X$$

a. Poišči vse rešitve X, če je $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ in $C = \{3\}$.
b. Kaj mora veljati za množice A, B in C, da bo ta sistem rešljiv? Opiši vse rešitve X. V katerem primeru je rešitev X enolična?

Naloga 55.
Naj bodo A, B, C dane množice in X neznana množica. Za sistem

$$X \cup C = A \cap X$$
$$B \cap X = C \setminus A$$

določi pogoje za rešljivost. V primerih, ko je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

Naloga 56.
Odloči, kaj mora veljati za množici A in B, da bo spodnji sistem rešljiv, nato pa poišči vse množice X, ki rešijo ta sistem!

$$A + (X \cap B) = A + B,$$
$$X \cup A \cup B = A.$$

Naloga 57.
Reši sistem enačb:

$$A \cap X = A \cap C,$$
$$X \cup C = C \setminus B.$$

Naloga 58.
Naj bodo A, B, C dane množice. Kdaj je rešljiv spodnji sistem enačb?

$$A \cup C = A \cap X,$$
$$B \cap C \cup (X \setminus A) = A \setminus X.$$

V primeru, ko je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

Naloga 59.
Naj bodo A, B, C dane množice in naj bo X neznana množica. Ugotovi, kdaj je spodnji sistem enačb rešljiv, in poišči vse njegove rešitve.

$$A \cup X = B \setminus X,$$
$$X \cup C = B \cap X,$$
$$A \cap X = C \setminus X.$$

Naloga 60.

Naj bodo A, B in C dane množice, X pa neznana množica. Kdaj je rešljiv sistem enačb

$$B \cap C = A \cup X,$$
$$B \cup X = A \cap C.$$

V primerih, ko je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

Naloga 61.

Naj bodo A, B in C poljubne množice. V kakšnem primeru velja enakost

$$(C \cup A) \cap B = (C \cap B) \cup A?$$

S pomočjo analize zgornjega primera reši sistem enačb z množicami

$$(X \cup A) \cap B = (X \cap B) \cup A,$$
$$A \cup X = B \cap X,$$

kjer je X neznana množica.

Naloga 62.

Za dane množice A, B in C ter neznano množico X opazujemo spodnji sistem enačb z množicami

$$A + B = X \cap C,$$
$$A \cup X = A \setminus C.$$

a. Recimo, da sta A in B disjunktni. Pri katerih pogojih je sistem v tem primeru rešljiv? Kaj so rešitve?
b. Pri katerih pogojih je sistem rešljiv brez dodatnih predpostavk? Kaj so rešitve?

POGLAVJE 4

Relacije

NALOGA 63.
Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ je podana relacija R s predpisom

$$x\,R\,y \text{ natanko tedaj, ko je izraz } x^2 + y \text{ deljiv s 3.}$$

a. Nariši grafa relacij R in R^2.
b. Ali je relacija R simetrična? Ali je R delna urejenost?
c. Ali je katera od relacij R oziroma R^2 ekvivalenčna?
d. Ali obstaja $m > 0$, da velja $1\,R^m\,1$? Ali obstaja $n > 0$, da velja $2\,R^n\,2$?

NALOGA 64.
Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ definiramo relacijo R z opisom:

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko ima enačba } ax + by = 3 \text{ celoštevilske rešitve,}$$

in relacijo $S = R \cup \mathrm{id}_A$.

a. Nariši grafe relacij R, R^2 in S.
b. Za relaciji R in S ugotovi, ali sta refleksivni, simetrični, tranzitivni.
c. Ali je katera od relacij iz prejšnje točke ekvivalenčna?

NALOGA 65.
Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko } a \text{ deli } b \text{ ali } b \text{ deli } a.$$

a. Nariši grafa relacij R in R^2.
b. Za vsako od relacij ugotovi, ali je refleksivna. Je katera simetrična? Tranzitivna?
c. Če je katera od relacij ekvivalenčna, potem poišči vse ekvivalenčne razrede.

NALOGA 66.
Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ je relacija R podana s predpisom

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko je } a + b \text{ liho praštevilo.}$$

(a) Ali je R refleksivna? Ali je simetrična? Ali je tranzitivna?
(b) Nariši grafa relacij R in R^2.
(c) Koliko ekvivalenčnih razredov določa relacija R^2?

NALOGA 67.
Na množici števil $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko imata } a \text{ in } b \text{ v trojiškem zapisu isto vsoto števk.}$$

a. Zapiši trojiške zapise števil iz A.
b. Nariši graf relacije R.
c. Ali je R ekvivalenčna relacija?
d. Ali je R delna urejenost?

Naloga 68.
Na množici $\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ definiramo relacijo R:

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko je } \gcd(a,b) > 2.$$

a. Nariši grafa relacij R in R^2.
b. Ali je katera izmed relacij R, R^2 ekvivalenčna relacija? Če je relacija ekvivalenčna določi ekvivalenčne razrede, sicer pa obrazloži, zakaj ni ekvivalenčna.

Naloga 69.
Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R:

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko je } \gcd(a,b) > 3.$$

a. Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.
b. Ali je relacija R simetrična, refleksivna ali tranzitivna? Ali je ekvivalenčna?
c. Ali je relacija R^2 simetrična, refleksivna ali tranzitivna? Ali je ekvivalenčna?

Naloga 70.
Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ je dana relacija:

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko } a \text{ deli } b^2.$$

a. Dokaži, da je relacija R refleksivna.
b. Ali je R tranzitivna? Dokaži ali pa poišči protiprimer!
c. Dokaži implikacijo: Če obstaja $k \in \mathbb{N}$, da a deli $b^{(2^k)}$, potem velja aR^*b.

Naloga 71.
Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$(a,b)\,R\,(c,d) \text{ natanko tedaj, ko je } (c-a)(d-b) \in \{-1,1\}.$$

a. Poišči vse (c,d), za katere je $(10,10)R(c,d)$.
b. Pokaži, da je relacija R^+ simetrična, tranzitivna in refleksivna.
c. Poišči ekvivalenčne razrede relacije R^+.

Naloga 72.
Naj bo $\mathbb{P}$ množica praštevil. Relacija R na naravnih številih razen 0 naj bo podana s predpisom

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko za vsa praštevila } p \in \mathbb{P} \text{ velja } (p|a \Leftrightarrow p|b).$$

a. Ali je $6\,R\,24$? Kaj pa $8\,R\,24$?
b. Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
c. Določi ekvivalenčni razred števila 2. Opiši še ekvivalenčni razred števila 2018.
d. Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

Naloga 73.
Na množici celih števil $\mathbb{Z}$ definiramo relacijo R z opisom:

$$a\,R\,b \text{ natanko tedaj, ko je } a^2 \le b^2.$$

a. Ali velja $1\,R\,2$, $-2\,R\,1$, $1\,R\,-3$?
b. Prepričaj se, da je relacija R refleksivna in tranzitivna.
c. Ali je R simetrična? Je R antisimetrična? Zakaj oziroma zakaj ne?

Naloga 74.
V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je dana relacija

$$x\,R\,y \text{ natanko tedaj, ko 7 deli } x^2 - y^2.$$

a. Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
b. Določi ekvivalenčni razred $[1]$?
c. Določi moč faktorske množice $\mathbb{Z}/R$.

NALOGA 75.
Na množici vseh besed iz črk x, y in z definiramo relacijo

$$\alpha R \beta \text{ natanko tedaj, ko je } \alpha' = \beta',$$

pri čemer dobimo besedo α' iz besede α tako, da izpustimo vse zaporedne ponovitve iste črke. Na primer, $(\mathsf{xxyyxzz})' = \mathsf{xyxz}$, $\mathsf{xyyzzz}\, R\, \mathsf{xxxyyzz}$ in $\neg\, \mathsf{xyz}\, R\, \mathsf{zyx}$.

a. Izračunaj $(\mathsf{xyyzzzyyx})'$.
b. Ali je $\mathsf{yxzzyxxy}\, R\, \mathsf{yxxyyxzz}$? Ali je $\mathsf{xzy}\, R\, \mathsf{zxxy}$?
c. Ali je R refleksivna, simetrična ali tranzitivna?
d. Ali je R ekvivalenčna? Če je, potem določi $[\mathsf{x}]$.

NALOGA 76.
Na množici besed $\mathcal{B}$ definiramo relacijo R z naslednjim opisom:

> beseda α je v relaciji z besedo β, $\alpha R \beta$, če lahko besedo β sestavimo iz črk besede α z uporabo največ enega dodatnega znaka (črke).

Tako je $\mathsf{hrast}\, R\, \mathsf{trak}$, vendar $\neg(\mathsf{hrast}\, R\, \mathsf{krak})$ in $\neg(\mathsf{hrast}\, R\, \mathsf{strop})$.

a. Denimo, da velja $\alpha R \beta$. V kakšni zvezi sta dolžini besed α in β?
b. Nariši graf relacije R v primeru, ko je

$$\mathcal{B} = \{\mathsf{klop}, \mathsf{lok}, \mathsf{oko}, \mathsf{pot}, \mathsf{prostor}, \mathsf{roka}, \mathsf{rosa}, \mathsf{cola}, \mathsf{rotor}, \mathsf{top}, \mathsf{zora}\}.$$

c. Določi (opiši z besedami) relacijo $R \cap R^{-1}$ za splošen $\mathcal{B}$. Lahko si pomagaš z grafom iz prejšnje točke.

NALOGA 77.
Na množici $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ je dana relacija R z opisom

$$aRb \;\ldots\; a \text{ in } b \text{ imata enako število prafaktorjev.}$$

Prafaktorje štejemo z večkratnostjo. Na primer, $5R7$ in $28R45$, vendar $\neg(14R28)$.

a. Ali velja $2R61$, $4R62$, $25R30$?
b. Preveri, da je R ekvivalenčna relacija.
c. Poišči najmanjše število v $[2019]_R$.
d. Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

NALOGA 78.
Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ je dana relacija R z opisom

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ in } b \text{ imata vsaj en skupen praštevilski delitelj.}$$

a. Nariši graf relacije R.
b. Ali je R refleksivna, simetrična, antisimetrična ali tranzitivna?
c. Ali je R ekvivalenčna relacija? Ali je R delna urejenost?
d. Poišči kakšno podmnožico $M \subset A$ z vsaj štirimi elementi, za katero velja, da sta vsaka dva elementa iz M v relaciji R.

NALOGA 79.
Naj bo A množica celih števil od 10 do 99; $A = \{10, 11, \ldots, 98, 99\}$. Naj xy pomeni desetiški zapis števila iz A. (Za $42 \in A$ je torej $\mathsf{x} = 4$ in $\mathsf{y} = 2$.) Na A definiramo relacijo R z opisom:

$$\mathsf{xy}\, R\, \mathsf{uv} \text{ natanko tedaj, ko je } \mathsf{x} < \mathsf{u} \text{ ali pa je } \mathsf{x} = \mathsf{u} \text{ in } \mathsf{y} \geq \mathsf{v}.$$

a. Med števili 79, 80, 82, 84 in 92 poišči urejene pare, ki so v relaciji.
b. Ali je relacija R refleksivna, simetrična ali tranzitivna?
c. Ali obstaja število $n \in A$, za katerega velja mRn za vsa števila $m \in A$?

Naloga 80.
Na množici $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je dana relacija R z opisom

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ in } b \text{ imata največ 3 skupne prafaktorje (šteto z večkratnostjo).}$$

Tako je npr. $6R8$ in $66R132$, vendar $\neg(132R264)$.

a. Ali velja $12R32$, $36R72$, $8R12$, $16R32$?
b. Utemelji, da je R simetrična. Ali je tranzitivna?
c. Ali je relacija R ekvivalenčna?
d. Ali obstaja število, ki je v relaciji R z vsemi ostalimi števili iz A?

POGLAVJE 5

Funkcije

NALOGA 81.
Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom $f(0) = 0$ in

$$f(n) = \text{vsota vseh različnih pozitivnih deliteljev števila } n.$$

a. Izračunaj $f(n)$ za $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.
b. Poišči vse n, za katere je $f(n) = 3$.
c. Ali je f injektivna. Ali je surjektivna? Je bijekcija?

NALOGA 82.
Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana z $f(0) = f(1) = 0$, za $n > 1$ pa z opisom

$$f(n) = \text{vsota eksponentov potenc praštevil v praštevilskem razcepu števila } n.$$

Tako je na primer $f(2) = 1$, $f(10) = f(2^1 \cdot 5^1) = 2$ in $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 4$.

a. Izračunaj $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(9)$.
b. Ali obstaja tak n, da je $f(n) = f(n+4)$?
c. Ali je f surjektivna?
d. Ali obstaja tak n, da je $f(n) = n+4$?

NALOGA 83.
Za funkcijo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ velja: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ in

$$f(n) = \text{vsota kvadratov vseh različnih praštevilskih deliteljev } n$$

za $n > 1$. Tako je npr. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, zato je $f(20) = 2^2 + 5^2 = 29$.

a. Izračunaj $f(n)$ za $n = 2, 3, \ldots, 12$.
b. Poišči $n \in \mathbb{N}$, za katerega je $f(n) = 150$.
c. Ali obstaja $m \in \mathbb{N}$, za katerega je $f(m) = 8$?
d. Ali je f injektivna? Ali je f surjektivna?

NALOGA 84.
Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana z $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, za $n > 1$ pa z opisom

$$f(n) = \text{vsota praštevil v praštevilskem razcepu } n.$$

Tako je na primer $f(2) = 2$, $f(4) = f(2 \cdot 2) = 2 + 2 = 4$, $f(10) = f(2 \cdot 5) = 2 + 5 = 7$ in $f(100) = f(2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5) = 2 + 2 + 5 + 5 = 14$.

a. Izračunaj $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(9)$.
b. Ali je f injektivna?
c. Ali je f surjektivna?
d. Za katere n velja $f(n) = n$?

NALOGA 85.
Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana z opisom

$$f(n) = \text{število različnih prafaktorjev v praštevilskem razcepu števila } n.$$

Tako je na primer $f(0) = f(1) = 0$, $f(4) = 1$, $f(18) = 2$, $f(60) = 3$, $f(330) = 4$.

a. Izračunaj $f(16)$, $f(24)$, $f(80)$, $f(90)$ in $f(315)$.
b. Ali je f surjektivna?
c. Dokaži, da za poljubni števili $m,n \in \mathbb{N}$ velja $f(mn) \leq f(m)+f(n)$.
d. Ali obstajata naravni števili $m,n \geq 2$, da je $f(m+n) > f(m)+f(n)$?

NALOGA 86.
Naj bo $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Eulerjeva funkcija, tj.

$$\varphi(n) = \text{število naravnih števil med 1 in } n, \text{ ki so tuja } n.$$

a. Poišči $\varphi(n)$ za $n \in \{1,2,\dots,10\}$.
b. Ali je φ injektivna? Surjektivna?
c. Dokaži, da za vse sode n velja
$$\varphi(n) \leq n/2.$$
d. Ali za vse $n \geq 3$ velja
$$\varphi(\varphi(n)) < n/2?$$

NALOGA 87.
Naj bosta preslikavi $f,g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ podani s predpisoma

$$f(x) = x+8 \quad \text{in} \quad g(x) = -x.$$

a. Pokaži, da je f bijekcija in se x in $f(x)$ razlikujeta vsaj za 3, tj. za vsak $x \in \mathbb{Z}$ je $|x - f(x)| \geq 3$.
b. Pokaži, da je g bijekcija in je razlika med x in $g(x)$ poljubno velika, tj. za vsako naravno število n obstaja $x \in \mathbb{Z}$, za katerega je $|x - g(x)| \geq n$.
c. Opiši kakšno bijektivno funkcijo $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, za katero velja, da se x in $h(x)$ razlikujeta vsaj za 3 in je razlika med x in $h(x)$ lahko poljubno velika.

NALOGA 88.
Preslikava $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ je definirana s predpisom

$$f(x,y) = (x+y, x-y).$$

a. Izračunaj $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(2,1)$.
b. Poišči vse $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, za katere je $f(x,y) = (3,6)$.
c. Poišči vse $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, za katere je $f(x,y) = (3,7)$.
d. Ali je preslikava f injektivna. Ali je surjektivna? Je bijekcija?

NALOGA 89.
Preslikava $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana z $f(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$f(n) = \text{najmanjše praštevilo, ki je večje od vseh prafaktorjev števila } n.$$

Tako je npr. $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(6) = 5$.
Preslikava $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definirana z $F(n) = n \cdot f(n)$.

a. Izračunaj $f(n)$ za $n = 11,12,13,\dots,20$.
b. Ali je f injektivna? Ali je f surjektivna?
c. Ali je F injektivna? Ali je F surjektivna?

NALOGA 90.
e Preslikava $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana z $f(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$f(n) = \text{najmanjše praštevilo, ki se ne pojavi v praštevilskem razcepu števila } n.$$

Tako je, na primer, $f(2) = 3$, $f(4) = 3$, $f(10) = 3$.

a. Izračunaj $f(n)$ za $n = 11,12,\dots,15$.

b. Ali je f injektivna? Ali je f surjektivna?
c. Poišči vse $n \in \mathbb{N}$, za katere je $f(n) \geq n$.
d. Preslikava $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definirana z $F(n) = n \cdot f(n)$. Poišči vse rešitve enačbe

$$F(n) = 42.$$

e. Ali je F injektivna? Ali je F surjektivna?

Naloga 91.
Preslikavo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiramo z opisom:

$f(n)$ je produkt števk v desetiškem zapisu števila n.

a. Ali je f injektivna?
b. Poišči najmanjši $m \in \mathbb{N}$, za katerega enačba $f(n) = m$ ni rešljiva.
c. Ali obstaja m iz zaloge vrednosti funkcije f, za katerega ima enačba $f(n) = m$ le končno mnogo rešitev?

Naloga 92.
Funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ in

$f(n)$ = produkt največjega in najmanjšega prafaktorja števila n.

Tako je na primer $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$ in $f(42) = 2 \cdot 7 = 14$.

a. Ali je f injektivna?
b. Ali je f surjektivna?
c. Opiši funkcijo $f \circ f$.
d. Za katere $n \in \mathbb{N}$ je rešljiva enačba $f(n) = n$?

POGLAVJE 6

Moč množic

NALOGA 93.

Proizvajalec čajev je 100 anketirancev vprašal, kaj običajno dodajo svojemu čaju. Izvedeli so, da sladkor doda 32 vprašanih, mleko pa jih doda trikrat več kot limono. Nihče ne doda mleka in limone hkrati, mleko in sladkor jih doda 12, sladkor in limono pa 10. Med vprašanimi je natanko toliko tistih, ki dodajo limono, kot tistih, ki čaju ne dodajo ničesar.

a. Koliko vprašanih čaju ne doda ničesar?
b. Koliko jih doda samo mleko?

NALOGA 94.

Na izbor za tekmovanje Slovenija ima talent se je prijavilo 40 tekmovalcev. Vsak izmed treh sodnikov si izbere 20 kandidatov, ki si po njegovem mnenju zaslužijo nastop na tekmovanju. Samo prvi in drugi sodnik izbereta 5 tekmovalcev, samo drugi in tretji sodnik 6 tekmovalcev, samo prvi in tretji sodnik pa 7 tekmovalcev. Število tistih, ki so jih izbrali vsi sodniki je enako številu tistih, ki jih ni izbral nobeden od sodnikov. Na tekmovanje se uvrstijo tekmovalci, ki sta jih izbrala vsaj dva sodnika. Koliko izmed 40 prijavljenih tekmovalcev se uvrsti v naslednji krog?

NALOGA 95.

V podjetju z 31 uslužbenci so dobili tri nove projekte. Pri prvem projektu sodeluje 8 zaposlenih. Pri drugem jih je aktivnih štirikrat več kot je tistih, ki ne delujejo na nobenem novem. Uslužbencev, ki delajo samo na prvem in drugem projektu je štirikrat manj kot tistih, ki delajo samo na tretjem. Osem zaposlenih hkrati dela na drugem in tretjem projektu, sedem pa na tretjem in prvem. Pet zaposlenih sodeluje na vseh treh projektih. Koliko ljudi je udeleženih pri največjem projektu in koliko jih trenutno ne dela na nobenem novem?

NALOGA 96.

Naj bo $A = \{1, 2, \ldots, 300\}$.

a. Koliko števil iz množice A je deljivih z vsaj enim od števil 5, 6 ali 9?
b. Koliko števil iz A je deljivih z natanko dvema od števil 5, 6 ali 9?

NALOGA 97.

Naj bo $A = \{360, 361, \ldots, 720\}$ in $B = \{1, 2, \ldots, 360\}$.

a. Koliko je števil v množici A, ki so deljiva s 3 ali 5?
b. Koliko je števil v množici B, ki so deljiva z 2, 3 ali 5, ne pa s 15?

NALOGA 98.

Naj bo $A = \{1, 2, 3, \ldots, 1024\}$.

a. Koliko števil iz A je deljivih z vsaj enim od 2, 6, 8?
b. Koliko števil iz A je deljivih z 2 in 6 in ne z 8?
c. Koliko števil iz A je deljivih s 6 in ne z 8 in ne z 9?

Naloga 99.

Koliko je naravnih števil med 1 in 16000, ki so deljiva s 4, 6 ali 9, niso pa deljiva z 12?

Naloga 100.

Koliko števil na celoštevilskem intervalu $A = \{1, 2, \dots, 1000\}$ je deljivih z natančno tremi od števil 3, 5, 7, 9.

Naloga 101.

Koliko števil med 1 in 2018, ki niso deljiva z 49, je deljivih z vsaj enim od števil 15 in 21?

Naloga 102.

a. Koliko števil med 1 in 1260 je deljivih z vsaj enim od 6, 9 ali 21?
b. Koliko števil med 1 in 1260 je deljivih z 21 ali pa z obema 6 in 9?

POGLAVJE 7

Teorija števil

NALOGA 103.
Dana je diofantska enačba $68x + 119y = 2057$.

a. Poišči vse rešitve.
b. Koliko je rešitev, kjer sta x in y naravni števili? Poišči jih.

NALOGA 104.
Študent se mora pripraviti na dva kolokvija. Ima ogromno zalogo nalog, za učenje pa bo porabil točno 15 ur časa. Za rešitev ene naloge iz OMA potrebuje 16 minut, za rešitev ene naloge iz DS pa 18 minut.
Koliko nalog pri vsakem predmetu naj reši, če se želi na oba predmeta čimbolj enakovredno pripraviti (torej rešiti približno enako število nalog).

NALOGA 105.
Na voljo imamo neomejeno količino znamk za 1.02 € in 0.72 €. Z njimi bi radi plačali 18.00 € poštnine.

a. Zapiši pripadajočo linearno diofantsko enačbo.
b. Poišči splošno rešitev te linearne diofantske enačbe.
c. Radi bi uporabili vsaj eno znamke vsake vrste. Koliko katerih znamk potrebujemo?

NALOGA 106.
Na voljo imamo neomejeno količino znamk za 1.05 € in 0.75 €. Na koliko načinov lahko z njimi plačamo točno 13.50 € poštnine? Kako lahko to storimo, če želimo uporabiti čimmanj znamk?

NALOGA 107.
Asistent je na eBayu kupil nekaj PNP tranzistorjev po 41 centov in nekaj NPN tranzistorjev po 37 centov. Skupaj je plačal 14 evrov in 90 centov. Koliko tranzistorjev posamezne vrste je kupil?

NALOGA 108.
Janezku je med vajami dolgčas, zato si izmisli naslednjo igro. Začne s številom 0 in na vsakem koraku prišteje ali odšteje 10 ali 22. Ali lahko na ta način pride do števila 1? Kaj pa do 8? Če je odgovor ne, pojasni, zakaj, sicer pa povej, kolikokrat mora prišteti ali odšteti vsako od števil, da bo skupaj uporabil čimmanj korakov (računskih operacij).

NALOGA 109.
Janezek se je pravkar vrnil z dvotedenskih počitnic. Seveda si je vsak dan privoščil vsaj en sladoled ali sadno kupo. Porcija sladoleda je stala 3,5 evra, sadna kupa pa 4,1 evra. Po koncu počitnic je ugotovil, da je zapravil za slaščice kar 52 evrov. Koliko porcij sladoleda si je privoščil?

NALOGA 110.
Na avtomatu za napitke stane kava 50 centov, čaj pa 30 centov. Žak želi pogostiti

sošolce, ki so prišli na vaje. Vsak (vključno z Žakom) si je izbral enega od napitkov, Žak pa je na koncu plačal 5.2 evra. Največ koliko študentov je bilo tisti dan na vajah?

Naloga 111.
Študentje so se odločili, da organizirajo zabavo ob koncu izpitov, zato so se odpravili v trgovino po gosti sok in oranžado. Liter soka stane 80 centov, liter oranžade pa 88 centov. Plačali so 20 evrov in 80 centov. Koliko litrov oranžade so kupili, če veš, da so kupili več soka?

Naloga 112.
Na planetu Myriapodus živita dve vrsti inteligentnih vesoljcev. Centiusi imajo 9, Miliusi pa 15 parov nog. Skupina vesoljcev, ki vsebuje pripadnike obeh vrst, se odpravi na taborenje. Ko se odpravijo spat, pred šotori skupaj ostane 393 parov čevljev.

a. Napiši pripadajočo diofantsko enačbo in poišči vse pozitivne rešitve.
b. Najmanj koliko vesoljcev je v skupini?

Naloga 113.
Dana je linearna diofantska enačba

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

a. Poišči splošno rešitev te diofantske enačbe.
b. Kolikšna je vsota komponent rešitev $x + y + z$?
c. Koliko je $x + y + z$, če so $x \geq 0$, $y \geq 0$ in $z \geq 0$?

Naloga 114.
Poišči vse rešitve diofantske enačbe $-3x + 7y + 12z = 21$. Koliko je takih, kjer so x, y in z pozitivni?

Naloga 115.
Po uspešno odpisanem kolokviju iz Diskretnih struktur se je 42 študentov odpravilo na pico v Picerijo Mathematica. Skupaj so naročili 28 pic okusov Dirichlet, Euler, Fermat in Hamilton ter za njih plačali 209 €. Število študentov, ki je naročilo pico Fermat, je dvakrat tolikšno kot število študentov, ki je naročilo pico Hamilton. Naročili so manj kot 6 pic Dirichlet. Pri tem pica Dirichlet stane 6 €, pica Euler 7 €, pica Fermat 8 € in pica Hamilton 9 €. Katerih pic so naročili največ?

Naloga 116.
Koliko je rešitev sistema

$$\begin{aligned} 11x + 9y + 8z &= 1000, \\ 6x + 8y + 12z &= 1000. \end{aligned}$$

pri katerih so $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Naloga 117.
V $\mathbb{Z}_{12}$ poišči vse rešitve sistema kongruenčnih enačb

$$5x + 3y \equiv 8 \pmod{12},$$

$$4x + 8y \equiv 8 \pmod{12}.$$

Naloga 118.
Naj bo $\mathcal{M}$ množica ostankov pri deljenju z 48.

a. Poišči inverz ostanka 11 v $\mathcal{M}$.

b. V $\mathcal{M}$ poišči vse rešitve sistema

$$\begin{aligned} 8x+15y &\equiv 3 \pmod{48}, \\ 11x+6y &\equiv 3 \pmod{48}. \end{aligned}$$

NALOGA 119.
Poišči vsa cela števila x, za katera velja

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 5 \pmod{9}, \\ 5x &\equiv 4 \pmod{8}. \end{aligned}$$

NALOGA 120.
Naj bo $\mathcal{M}$ množica ostankov pri deljenju z 39.

a. Poišči $\varphi(39)$ in vse obrnljive ostanke v $\mathcal{M}$.
b. Poišči vse $x \in \mathcal{M}$, ki rešijo enačbo

$$38x \equiv 3 \pmod{39}.$$

c. Poišči število $n \neq 39$, za katero velja, da je n produkt dveh različnih praštevil in je $\varphi(n) = \varphi(39)$.

NALOGA 121.
Poišči ostanek števila $7^{5^{9^{10}}}$ pri deljenju z 19.

NALOGA 122.
Naj bo φ Eulerjeva φ funkcija.

a. Izračunaj $\varphi(2017)$, $\varphi(2018)$ in $\varphi(2019)$.
b. Poišči ostanek števila 6057^{2018} pri deljenju z 2018.

NALOGA 123.
Poišči ostanek števila $102^{103^{104}}$ pri deljenju s praštevilom 313.
Namig: Uporabi Eulerjevo funkcijo ϕ in Eulerjev izrek.

NALOGA 124.
Naj bo a ostanek, ki ga daje število $5^{13^{23^{2018}}}$ pri deljenju s 24. Poišči vse rešitve sistema enačb:

$$\begin{aligned} ax+17y &\equiv 1 \pmod{24}, \\ 6x+10y &\equiv 2 \pmod{24}. \end{aligned}$$

POGLAVJE 8

Permutacije

NALOGA 125.
Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(2\ 4\ 6\ 8).$$

Poišči vsaj tri različne permutacije $\pi \in S_9$, ki rešijo enačbo

$$\alpha\pi^{1102} = \beta.$$

NALOGA 126.
Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = (1\ 9)(3\ 7)(3\ 10)(3\ 8)(3\ 5)(9\ 1).$$

a. Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov.
b. Izračunaj permutacijo $\gamma = \alpha * \beta$ ter določi njeno ciklično strukturo, red in parnost.
c. Določi vse možne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo $\pi^{10} = \gamma$.
d. Za vsako ciklično strukturo iz prejšnje točke poišči vsaj eno rešitev.

NALOGA 127.
Dani sta permutacija $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$ in enačba

$$\alpha^{-1}\pi^4 = \alpha^2\pi$$

(za neznano permutacijo $\pi \in S_{10}$).

a. Zapiši to enačbo v obliki $\pi^k = \beta$ (za ustrezen k in ustrezno permutacijo β).
b. Poišči dopustne ciklične strukture za permutacijo π.
c. Za vsako od dopustnih cikličnih struktur poišči vsaj eno rešitev zgornje enačbe.

NALOGA 128.
V množici S_9 vseh permutacij na 9 elementih opazujemo enačbo

$$\pi^2 = \pi^3 * \alpha * \pi,$$

kjer je $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 9 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Določi parnost in red permutacije α.
b. Kaj so dopustne ciklične strukture permutacije π? Kolikšen je najmanjši možen red permutacije π?
c. Za vsako dopustno ciklično strukturo poišči eno rešitev.

NALOGA 129.
Dani sta permutaciji

$$\alpha = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6) \ \text{ in } \ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Določi ciklično strukturo, red in parnost permutacije $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$.
b. Določi vse dopustne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo

$$\pi^4 = \alpha * \beta * \alpha^{-1}.$$

c. Poišči vse rešitve zgornje enačbe.

NALOGA 130.
Poišči vsaj tri različne permutacije $\pi \in S_{10}$, ki rešijo enačbo

$$\pi^3 = (1\ 2)(3\ 5)(7\ 9)(4\ 6\ 8\ 10).$$

NALOGA 131.
Pokaži, da ima enačba

$$\pi^{2013} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

vsaj pet rešitev.

NALOGA 132.
Naj bo $\alpha \in S_8$ permutacija $(1\ 3)(2\ 5)(4\ 7)(6\ 8)$. Ali sta v S_8 rešljivi enačbi

$$\pi^{13} = \alpha \ \text{ in } \ \pi^{16} = \alpha\,?$$

Rešljivost lahko utemeljiš tako, da poiščeš eno rešitev enačbe. Če enačba nima rešitev, navedi natančne razloge zakaj ne.

NALOGA 133.
Dane so permutacije

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \\ \beta &= (1\ 2)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 3)(4\ 5)(4\ 10)(4\ 8), \\ \gamma &= (1\ 4\ 9\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8). \end{aligned}$$

a. Poišči ciklične strukture permutacij α, β, γ in določi njihove parnosti.
b. Poišči vse možne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo

$$\alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma$$

c. Poišči vsaj eno rešitev zgornje enačbe, ki ima najvišji možni red.

NALOGA 134.
Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \ \text{ in } \ \beta = (1\,3)(5\,8).$$

a. Določi red in ciklično strukturo permutacije $\alpha * \beta$.
b. Določi vse ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo

$$\alpha^{-1} * \pi^6 = \beta.$$

c. Za vsako od cikličnih struktur iz točke (b) poišči vsaj dve različni rešitvi enačbe.

Naloga 135.
Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = (1\,2)(3\,4)(5\,6).$$

a. Določi red in ciklično strukturo permutacij α, β, α^2, β^2, $\alpha * \beta$ in $\alpha * \beta * \alpha$.
b. Pokaži, da ima pri neznanki π enačba

$$\pi^2 = \alpha * \beta$$

vsaj dve rešitvi, medtem ko enačba

$$\pi^2 = \alpha * \beta * \alpha$$

ni rešljiva.

Naloga 136.
Dani sta permutacija $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ in enačba $\pi^3 = \alpha$.

a. Določi ciklično strukturo in parnost permutacije α.
b. Določi vse dopustne ciklične strukture za neznano permutacijo π, pri katerih je enačba rešljiva.
c. Za vsako od dopustnih cikličnih struktur poišči vsaj eno rešitev.

Naloga 137.
Za permutaciji π in $\alpha \in S_8$ velja

$$\alpha^2 = \mathrm{id} \text{ in } \pi * \alpha * \pi = \alpha.$$

a. Prepričaj se, da je red permutacij $\pi * \alpha$ in $\alpha * \pi$ največ 2.
b. Kaj so dopustne ciklične strukture za α, $\pi * \alpha$ in $\alpha * \pi$?
c. Naj bo $\alpha = (1\ 8)(2\ 7)(3\ 6)(4\ 5)$. Poišči tri rešitve π enačbe

$$\pi * \alpha * \pi = \alpha,$$

ki so po vrsti redov 1, 2 in več kot 3.

Naloga 138.
V množici permutacij S_{10} opazujemo permutacije, ki rešijo enačbo $\pi^{10} = \pi$.

a. Cikli kakšnih dolžin lahko nastopajo v razcepu permutacije π na produkt disjunktnih ciklov.
b. Pokaži, da imajo vse permutacije π, ki rešijo enačbo, vsaj eno fiksno točko.
c. Poišči eno rešitev, ki ima najmanjše možno število fiksnih točk.

Naloga 139.
Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1\quad 2\quad n)(1\quad 3\quad n)\cdots(1\quad n-1\quad n).$$

a. Zapiši permutacije π_4, π_5 in π_6.
b. Izračunaj $\pi_n(1)$, $\pi_n(n)$, $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.
c. Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n.

Naloga 140.
Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = (1\ 5\ 3\ 8\ 2\ 4)(6\ 9\ 7).$$

a. Preveri, da imata β in $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$ enako ciklično strukturo.
b. Pokaži, da velja $(\alpha * \beta * \alpha^{-1})^2 = \alpha * \beta^2 * \alpha^{-1}$. Poskusi brez direktnega računa.
c. Poišči vse možne ciklične strukture permutacij

$$\alpha * \beta^k * \alpha^{-1}, \text{ ko } k \in \mathbb{N}.$$

Naloga 141.
Dana je permutacija

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Zapiši α kot produkt disjunktnih ciklov ter določi njeno ciklično strukturo, red in parnost.
b. Poišči vse možne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo $\pi^{22} = \alpha$, in ugotovi, pri katerih je enačba rešljiva.
c. Poišči po dve rešitvi za vsako dobro ciklično strukturo iz prejšnje točke.

Naloga 142.
Poišči vse dopustne ciklične strukture permutacij $\pi \in S_{10}$, ki rešijo enačbo

$$\pi^4 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6).$$

Zapiši še vsaj 3 različne rešitve te enačbe.

Naloga 143.
Dana je permutacija $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 5 & 2 & 8 & 6 & 7 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Zapiši permutacijo α z disjunktnimi cikli in določi njeno parnost.
b. Poišči kako rešitev enačbe $\pi^{2021} = \alpha$.
c. Poišči kako rešitev enačbe $\pi^{2022} = \alpha$.
d. Katera izmed enačb $\pi^{2021} = \alpha$, $\pi^{2022} = \alpha$, $\pi^{2025} = \alpha$ ima največ rešitev?

Naloga 144.
Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = (1\ 3\ 5\ 6)(2\ 8\ 7).$$

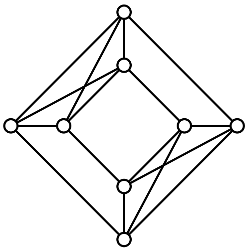
a. Zapiši α kot produkt disjunktnih ciklov.
b. Določi red, ciklično strukturo in parnost permutacij α in β.
c. Poišči vsaj dve različni permutaciji $\pi \in S_8$, ki rešijo enačbo

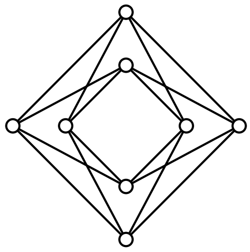
$$\alpha\pi^{202} = \beta.$$

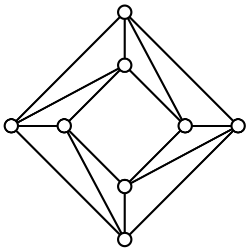
POGLAVJE 9

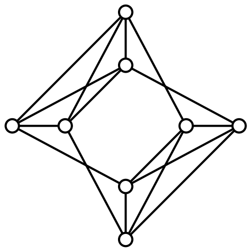
Grafi

Naloga 145.
Dani so grafi G_1, G_2, G_3 in G_4.


G_1

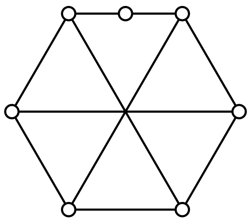

G_2

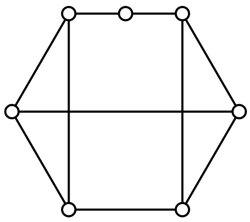

G_3

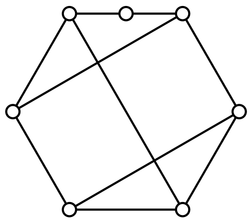

G_4

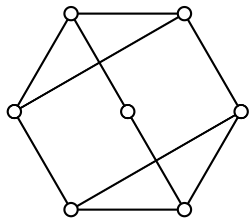
a. Kateri od grafov so Eulerjevi?
b. Kateri od grafov vsebujejo cikel dolžine 3?
c. Kateri od grafov vsebujejo K_4 kot podgraf?
d. Kateri pari danih grafov so izomorfni?

Naloga 146.
Dani so grafi G_1, G_2, G_3 in G_4.


G_1

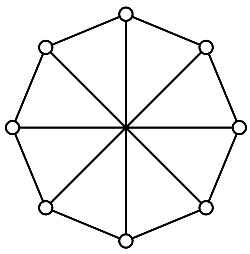

G_2

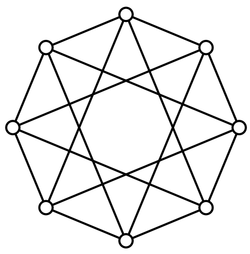

G_3

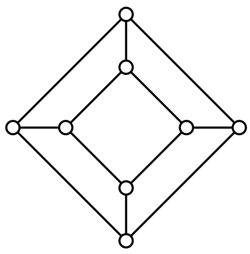

G_4

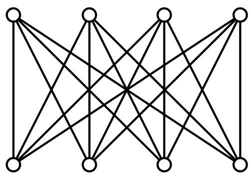
a. Določi število vozlišč in število povezav za vsakega od grafov.
b. Kolikšne so dolžine najdaljših ciklov v teh grafih?
c. Kolikšne so dolžine najkrajših ciklov, ki gredo skozi vozlišče stopnje 2?
d. Kateri od danih grafov so izomorfni?

Naloga 147.
Dani so grafi G_1, G_2, G_3 in G_4.


G_1

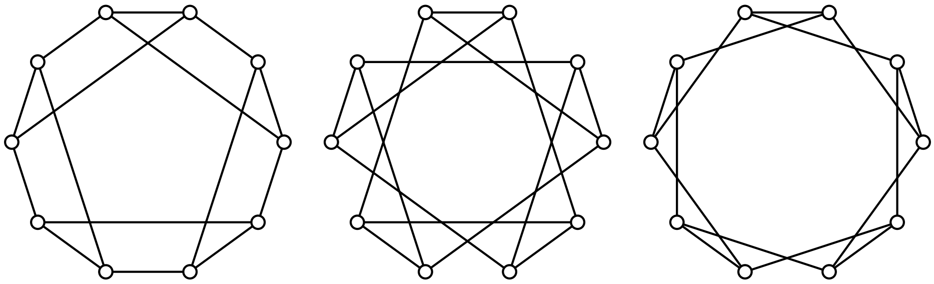

G_2


G_3


G_4

a. Določi zaporedje stopenj vozlišč za vsakega od grafov.
b. Kateri od zgornjih grafov so dvodelni?
c. Kateri pari danih grafov so izomorfni?

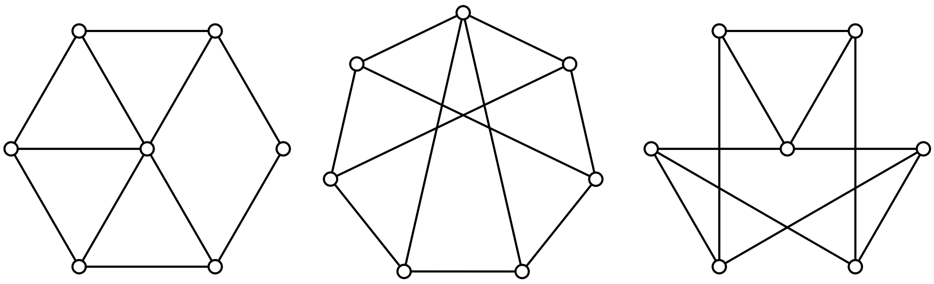
Naloga 148.
Dani so grafi G_1, G_2 in G_3.



G_1 G_2 G_3

a. Določi kromatična števila teh grafov.
b. Za vsakega od grafov ugotovi, ali je Hamiltonov.
c. Ali so kateri od grafov med sabo izomorfni? Zakaj oziroma zakaj ne?

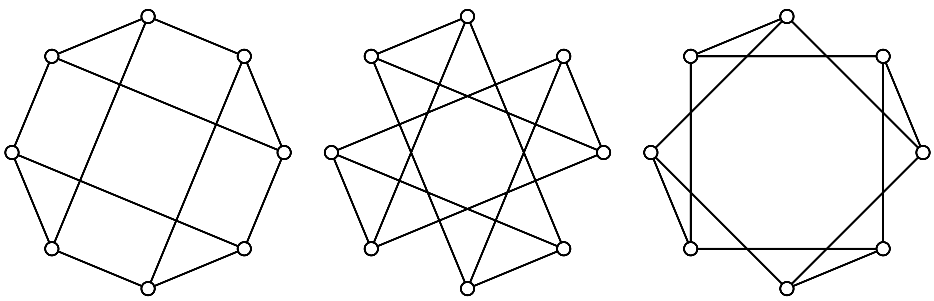
Naloga 149.
Dani so grafi G_1, G_2 in G_3.



G_1 G_2 G_3

a. Določi njihova kromatična števila.
b. Za vsakega od grafov ugotovi, ali je Hamiltonov.
c. Ali so kateri od grafov med sabo izomorfni? Zakaj oziroma zakaj ne?

Naloga 150.
Dani so grafi G_1, G_2 in G_3.

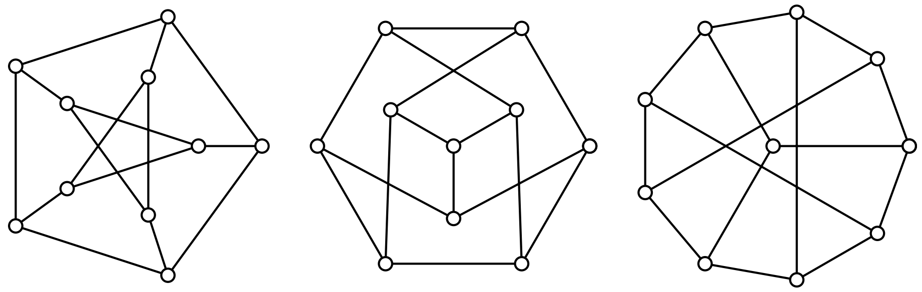


G_1 G_2 G_3

a. Določi njihova kromatična števila.
b. Za vsakega od grafov ugotovi, ali je Hamiltonov.

c. Ali so kateri od grafov med sabo izomorfni? Zakaj oziroma zakaj ne?

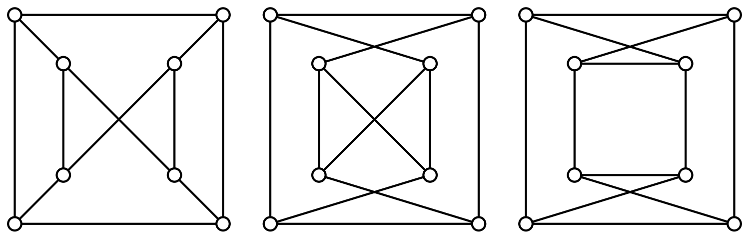
NALOGA 151.
Dani so grafi G_1, G_2 in G_3.



G_1 G_2 G_3

a. Za vsakega od grafov določi največjo in najmanjšo stopnjo točke.
b. Za vsakega od grafov določi dolžino najkrajšega cikla v grafu.
c. Poišči še eno lastnost, ki je skupna vsem trem grafom.
d. Natančno utemelji zakaj so vsi trije grafi izomorfni.

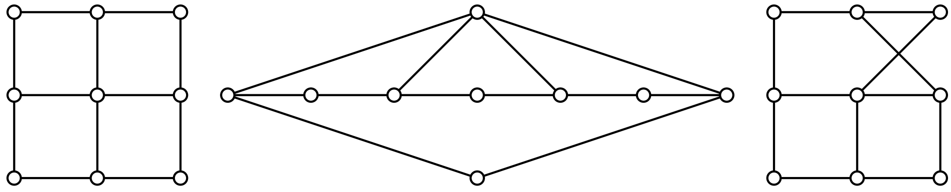
NALOGA 152.
Dani so grafi G_1, G_2 in G_3.



G_1 G_2 G_3

a. Poišči vsaj štiri lastnosti, ki so skupne vsem trem grafom.
b. Kateri grafi so dvodelni in kateri ne?
c. Za vsak par grafov ugotovi, ali sta izomorfna ali ne.

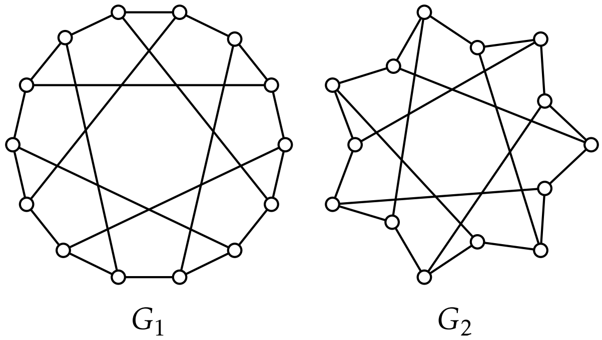
NALOGA 153.
Dani so grafi G_1, G_2 in G_3.



G_1 G_2 G_3

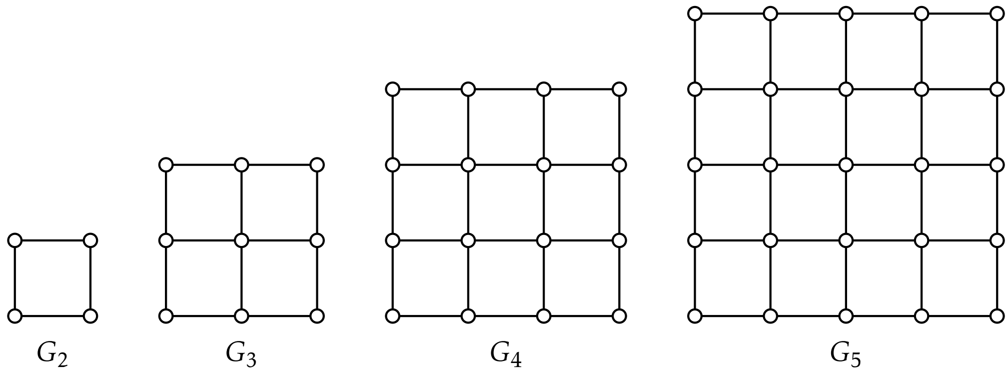
a. Določi zaporedje stopenj vozlišč za grafe na sliki.
b. Določi kromatično število grafov.
c. Kateri izmed grafov so Hamiltonovi?
d. Ali sta katera izmed grafov izomorfna?

Naloga 154.
Dana sta grafa G_1 in G_2.



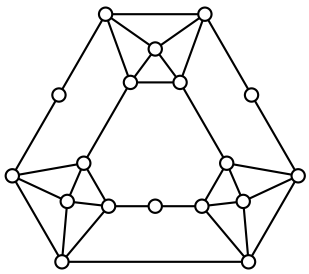
a. Za vsakega od grafov ugotovi, ali je Eulerjev.
b. Za vsakega ugotovi, ali je Hamiltonov.
c. Ali sta grafa izomorfna?

Naloga 155.
Za vsako naravno število $n \geq 2$ definiramo graf G_n na n^2 vozliščih kot je prikazano na spodnji sliki za $n = 2, 3, 4, 5$.



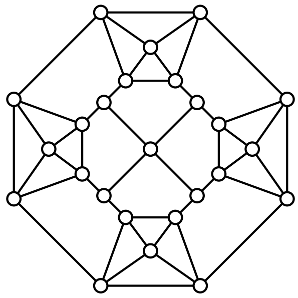
a. Za katere n je graf G_n Eulerjev?
b. Določi kromatično število grafa G_n za vse $n \geq 2$.
c. Ali obstajata različni naravni števili m in n, za kateri sta grafa G_m in G_n izomorfna?
d. Za katere n je graf G_n Hamiltonov? Opiši konstrukcijo Hamiltonovega cikla ali pa z razpadom pokaži, da Hamiltonovega cikla ni.

Naloga 156.
Naj bo G graf na spodnji sliki.



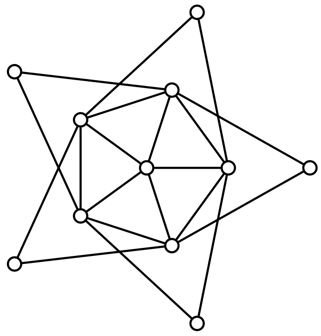
a. Ali je graf G Eulerjev?
b. Ali je graf G Hamiltonov?
c. Določi kromatično število grafa G.

Naloga 157.
Naj bo G graf na spodnji sliki.



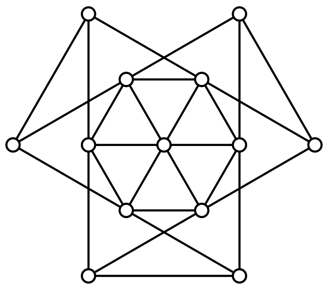
a. Ali je graf G Eulerjev?
b. Ali je graf G Hamiltonov?
c. Določi kromatično število grafa G.

Naloga 158.
Naj bo G graf na spodnji sliki.



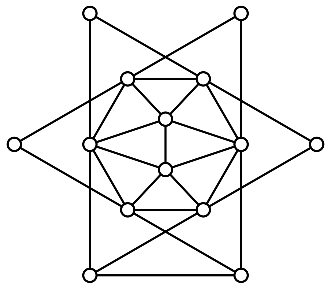
a. Ali je graf G Eulerjev?
b. Ali je graf G Hamiltonov?
c. Določi kromatično število grafa G.

Naloga 159.
Naj bo G graf na spodnji sliki.



a. Ali je graf G Eulerjev?
b. Ali je graf G Hamiltonov?
c. Določi njegovo kromatično število. Ali obstaja tako vozlišče v, da bo graf $G - v$, ki ga dobimo, ko to vozlišče odstranimo, dvodelen?

Naloga 160.
Naj bo G graf na spodnji sliki.



a. Ali je graf G Eulerjev?
b. Ali je graf G Hamiltonov?
c. Določi njegovo kromatično število.
d. Ali obstaja tako vozlišče u, da bo graf, ki ga dobimo, če grafu G odstranimo vozlišče u, dvodelen?
e. Ali obstajata taki vozlišči u in v, da bo graf, ki ga dobimo, če grafu G odstranimo vozlišči u in v, dvodelen?

Naloga 161.
Za graf G njegov *komplementarni graf* $\overline{G}$ konstruiramo takó, da

(i) odstranimo vse povezave v G ter
(ii) dodamo vse povezave med pari točk, ki v G niso sosede.

a. Denimo, da ima graf G na 5 točkah po vrsti točke stopenj $1, 1, 2, 2, 2$. Kakšno zaporedje stopenj vozlišč ima njegov komplement $\overline{G}$?
b. Določi vse (neizomorfne) grafe na 5 vozliščih z natanko 5 povezavami.
c. Kateri izmed njih so izomorfni svojemu komplementu?

Naloga 162.
Eulerjev graf G ima devet vozlišč in 12 povezav.

a. Določi minimalno stopnjo vozlišča v takšnem grafu.
b. Kakšno je zaporedje stopenj njegovih vozlišč? Možnih je več zaporedij.
c. Poišči štiri neizomorfne grafe z zgoraj omenjenimi lastnostmi.

Naloga 163.
Naj bo $\mathcal{G}$ razred povezanih grafov, ki vsebujejo samo točke stopenj 3 in 5, pri čemer nobeni dve točki stopnje 5 nista sosedi.

a. Poišči in nariši grafa $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ s 6 oziroma 8 vozlišči.
b. Pokaži, da ne obstaja graf $G_3 \in \mathcal{G}$, ki ima natanko 7 vozlišč.
c. Pokaži, da je $\chi(G) \leq 4$ za vsak $G \in \mathcal{G}$. Kako bi točke takšnega grafa pobarval s požrešno metodo?
d. Pokaži, da v $\mathcal{G}$ obstaja graf s kromatičnim številom 4.

Rešitve

1. Izjavni račun

Rešitev naloge 1.

Če bi Urban šel v Južno Afriko, potem bi iz druge trditve sledilo, da bosta šla tudi Zoran in Tomaž, iz prve pa da bo šel Simon, Tomaž pa ne. Iz tretje bi sledilo, da mora ostati doma Simon. Prišli smo v protislovje, ki pove, da Urban ne sme v Južno Afriko. Če pa, kot to trdi Ana, Urban ostane doma, je druga trditev avtomatično resnična. Če gre v tem primeru v Južno Afriko Zoran, potem gre še Simon, Tomaž in Urban pa ne. Če Zoran ne gre, je tudi prva trditev avtomatično res. V tem primeru Tomaž ali Simon lahko gresta ali pa ne. V vseh neprotislovnih primerih je Urban ostal doma, torej ima Ana prav.
Nalogo pa lahko rešimo tudi s pomočjo resničnostne tabele. Označimo z s, u, t in z naslednje trditve:

$$\begin{aligned} s &= \text{Simon bo šel v Južno Afriko.} \\ u &= \text{Urban bo šel v Južno Afriko.} \\ t &= \text{Tomaž bo šel v Južno Afriko.} \\ z &= \text{Zoran bo šel v Južno Afriko.} \end{aligned}$$

Izjave, ki jih je slišala Ana, lahko zapišemo kot

$$z \vee u \Rightarrow s \wedge \neg t, \quad u \Rightarrow z \wedge t, \quad t \Rightarrow s \vee z.$$

V tabeli izračunamo vrednosti vseh treh izjav:

s	u	t	z	z	$\vee$	u	$\Rightarrow$	s	$\wedge$	$\neg$	t	u	$\Rightarrow$	z	$\wedge$	t	t	$\Rightarrow$	s	$\vee$	z
0	0	0	0		0		**1**		0				**1**		0			**1**		0	
0	0	0	1		1		**0**		0												
0	0	1	0		0		**1**		0				**1**		0			**0**		0	
0	0	1	1		1		**0**		0												
0	1	0	0		1		**0**		0												
0	1	0	1		1		**0**		0												
0	1	1	0		1		**0**		0												
0	1	1	1		1		**0**		0												
1	0	0	0		0		**1**		1				**1**		0			**1**		1	
1	0	0	1		1		**1**		1				**1**		0			**1**		1	
1	0	1	0		0		**1**		0				**1**		0			**1**		1	
1	0	1	1		1		**0**		0												
1	1	0	0		1		**1**		1				**0**		0						
1	1	0	1		1		**1**		1				**0**		0						
1	1	1	0		1		**0**		0												
1	1	1	1		1		**0**		0												

Vidimo, da so vse tri trditve resnične samo v primerih, ko vsi ostanejo doma, ko gre v Južno Afriko samo Simon, gresta samo Simon in Zoran ali pa gresta samo Simon in Tomaž. Urban bo torej vsekakor ostal doma.

Rešitev naloge 2.

Označimo z p, r, s in t naslednje trditve:

$$\begin{aligned} p &= \text{Primož ima opravljen izpit iz DS.} \\ r &= \text{Robert ima opravljen izpit iz DS.} \\ s &= \text{Samo ima opravljen izpit iz DS.} \\ t &= \text{Tilen ima opravljen izpit iz DS.} \end{aligned}$$

Dane izjave lahko zapišemo takole:

$$p \veebar r,\ r \Rightarrow t,\ p \vee r \Rightarrow s,\ r \veebar \neg s.$$

Izračunajmo vrednosti vseh štirih izjav v resničnostni tabeli:

p	r	s	t	p	$\veebar$	r	r	$\Rightarrow$	t	p	$\lor$	r	$\Rightarrow$	s	r	$\veebar$	$\neg$	s
0	0	0	0		**0**													
0	0	0	1		**0**													
0	0	1	0		**0**													
0	0	1	1		**0**													
0	1	0	0		**1**			**0**										
0	1	0	1		**1**			**1**			1		**0**					
0	1	1	0		**1**			**0**										
0	1	1	1		**1**			**1**			1		**1**		1	**1**	0	
1	0	0	0		**1**			**1**			1		**0**					
1	0	0	1		**1**			**1**			1		**0**					
1	0	1	0		**1**			**1**			1		**1**		0	**0**	0	
1	0	1	1		**1**			**1**			1		**1**		0	**0**	0	
1	1	0	0		**0**													
1	1	0	1		**0**													
1	1	1	0		**0**													
1	1	1	1		**0**													

Vidimo, da so vse izjave resnične natanko v primeru, ko so Robert, Samo in Tilen naredili izpit, Primož pa ne.

Rešitev naloge 3.

Z resničnostno tabelo izračunamo vse možne vrednosti danega izraza:

p	q	X	$\neg$	(	p	$\Leftrightarrow$	(	q	$\Leftrightarrow$	X	))	$\lor$	p	$\land$	q
0	0	0	1			0			1			**1**		0	
0	0	1	0			1			0			**0**		0	
0	1	0	0			1			0			**0**		0	
0	1	1	1			0			1			**1**		0	
1	0	0	0			1			1			**0**		0	
1	0	1	1			0			0			**1**		0	
1	1	0	1			0			0			**1**		1	
1	1	1	0			1			1			**1**		1	

Zdaj lahko premislimo, kako bo izraz X odvisen od p in q, če naj bo dani izraz tavtologija.

p	q	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0 ali 1

Dobimo dve možni rešitvi. Izraz X_1 bo imel v resničnostni tabeli vrednosti 0110, izraz X_2 pa 0111. Izberemo lahko na primer $X_1 = \neg(p \Leftrightarrow q)$ in $X_2 = p \vee q$. Dani izraz ne more biti nikoli protislovje, ker v primeru $p \sim q \sim 1$ ne moremo izbrati vrednosti za X tako, da bi bil dani izraz napačen.

Rešitev naloge 4.

Z resničnostno tabelo izračunamo vse možne vrednosti danega izraza:

p	q	X	$\neg$	p	$\wedge$	X	$\vee$	q	$\wedge$	$\neg$	(	p	$\Leftrightarrow$	X	)
0	0	0			0		**0**		0	0			1		
0	0	1			1		**1**		0	1			0		
0	1	0			0		**0**		0	0			1		
0	1	1			1		**1**		1	1			0		
1	0	0			0		**0**		0	1			0		
1	0	1			0		**0**		0	0			1		
1	1	0			0		**1**		1	1			0		
1	1	1			0		**0**		0	0			1		

Zdaj lahko premislimo, kako bo izraz X odvisen od p in q, če naj bo dani izraz protislovje.

p	q	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0 ali 1
1	1	1

Dobimo dve rešitvi. Izraz X_1 ima v resničnostni tabeli vrednosti 0001, izraz X_2 pa 0011. Izberemo lahko na primer $X_1 = p \wedge q$ in $X_2 = p$. Vidimo, da v primeru, ko je $p \sim 1$ in $q \sim 0$, vrednosti X ne moremo izbrati tako, da bi bil dani izraz resničen, zato ne obstaja tak X, da bi bil dani izraz tavtologija.

Rešitev naloge 5.

a. Ker je $\not\Rightarrow$ dvomestni veznik, dobimo tabelo s štirimi vrsticami:

p	q	$\neg$ (p $\Rightarrow$ q)
0	0	**0** 1
0	1	**0** 1
1	0	**1** 0
1	1	**0** 1

Vezniku $\not\Rightarrow$ torej ustreza zaporedje 0010.

b. Opazimo, da je $p \not\Rightarrow p \sim 0$. Spomnimo se še, da je $p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q$. Od tu takoj dobimo

$$\begin{aligned}\neg p &\sim p \Rightarrow 0\\ &\sim p \Rightarrow (p \not\Rightarrow p)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}p \vee q &\sim \neg(\neg p) \vee q\\ &\sim \neg p \Rightarrow q\\ &\sim (p \Rightarrow (p \not\Rightarrow p)) \Rightarrow q.\end{aligned}$$

Spomnimo se še, da lahko ekvivalenco zapišemo kot

$$p \Leftrightarrow q \sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Če bi torej znali izraziti veznik $\wedge$ z veznikoma $\Rightarrow$ in $\not\Rightarrow$, bi lahko tako zapisali tudi ekvivalenco. Ker je

$$p \not\Rightarrow q \sim \neg(p \Rightarrow q) \sim \neg(\neg p \vee q) \sim p \wedge \neg q,$$

je

$$p \wedge q \sim p \not\Rightarrow \neg q \sim p \not\Rightarrow (q \Rightarrow (q \not\Rightarrow q)),$$

zato je

$$\begin{aligned}p \Leftrightarrow q &\sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\\ &\sim (p \Rightarrow q) \not\Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \not\Rightarrow (q \Rightarrow p))).\end{aligned}$$

c. Ker smo samo z veznikoma $\Rightarrow$ in $\not\Rightarrow$ zapisali veznika iz polnega nabora $\{\neg, \vee\}$, je nabor $\{\Rightarrow, \not\Rightarrow\}$ poln. Nabor $\{\vee, \not\Rightarrow\}$ ni poln, ker oba veznika ohranjata ničle. Oglejmo si še nabor $\mathcal{N} = \{\Leftrightarrow, \not\Rightarrow\}$. Najprej pogledamo, kaj veznika naredita s konstantami:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \not\Rightarrow q$
0	0	1	0
1	1	1	0

Ker prvi ne ohranja ničel in drugi ne ohranja enic, je nabor najbrž poln. Izberemo polni nabor $\mathcal{P} = \{\neg, \Rightarrow\}$ in pokažemo, da lahko vse veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo samo z vezniki iz $\mathcal{N}$. Ker je $\neg p \sim p \Leftrightarrow 0$ in je $p \not\Rightarrow p \sim 0$, takoj dobimo

$$\neg p \sim p \Leftrightarrow (p \not\Rightarrow p).$$

Izrazimo še implikacijo

$$\begin{aligned}p \Rightarrow q &\sim \neg\neg(p \Rightarrow q)\\ &\sim \neg(p \not\Rightarrow q)\\ &\sim (p \not\Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \not\Rightarrow q) \not\Rightarrow (p \not\Rightarrow q)).\end{aligned}$$

Nabor $\mathcal{N}$ je torej poln.

Rešitev naloge 6. ⇧

a. Najprej preverimo, kaj veznika $\nLeftarrow$ in $\Rightarrow$ naredita s konstantami:

p	q	$p \nLeftarrow q$	$p \Rightarrow q$
0	0	0	1
1	1	0	1

Vidimo, da nabor $\{\nLeftarrow\}$ ni poln, ker veznik ohranja ničle.

b. Iz zgornje tabele vidimo, da veznik $\nLeftarrow$ ne ohranja enic, veznik $\Rightarrow$ pa ne ohranja ničel, zato je nabor $\{\nLeftarrow, \Rightarrow\}$ najbrž poln. Izberemo polni nabor $\mathcal{P} = \{\neg, \Rightarrow\}$. Veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z veznikoma $\nLeftarrow$ in $\Rightarrow$:

$$
\begin{aligned}
p \Rightarrow q &\sim p \Rightarrow q, \\
\neg p &\sim p \Rightarrow 0 \\
&\sim p \Rightarrow \neg 1 \\
&\sim p \Rightarrow \neg(p \Rightarrow p) \\
&\sim p \Rightarrow (p \nLeftarrow p).
\end{aligned}
$$

Nabor $\{\nLeftarrow, \Rightarrow\}$ je torej poln.

c. Pomagamo si z zgoraj izraženo negacijo in dobimo

$$
\begin{aligned}
p \wedge q &\sim \neg\neg(p \wedge q) \\
&\sim \neg(\neg p \vee \neg q) \\
&\sim \neg(p \Rightarrow \neg q) \\
&\sim \neg q \nLeftarrow p \\
&\sim (q \Rightarrow (q \nLeftarrow q)) \nLeftarrow p.
\end{aligned}
$$

Poleg tega je

$$
\begin{aligned}
p \vee q &\sim \neg\neg p \vee q \\
&\sim \neg p \Rightarrow q \\
&\sim (p \Rightarrow (p \nLeftarrow p)) \Rightarrow q.
\end{aligned}
$$

Rešitev naloge 7. ⇧

a. Očitno je $1 \sim p \Rightarrow p$. Ekvivalenco pa lahko zapišemo kot

$$p \Rightarrow q \sim \neg(p \veebar q) \sim (p \veebar q) \Rightarrow 0 \sim (p \veebar q) \Rightarrow (p \veebar p).$$

b. Izberimo polni nabor $\mathcal{P} = \{\neg, \Rightarrow\}$ in oba veznika iz $\mathcal{P}$ izrazimo samo z uporabo veznikov $\veebar$ in $\Rightarrow$:

$$
\begin{aligned}
p \Rightarrow q &\sim p \Rightarrow q, \\
\neg p &\sim p \Rightarrow 0 \\
&\sim p \Rightarrow (p \veebar p).
\end{aligned}
$$

Nabor $\{\veebar, \Rightarrow\}$ je torej poln.

Rešitev naloge 8. ⇧

a. Po definiciji veznika # je $p\#1 \sim \neg p \wedge 1 \sim \neg p$, torej
$$p \wedge q \sim (\neg p)\#q \sim (p\#1)\#q.$$
b. Ker je $0\#0 \sim \neg 0 \wedge 0 \sim 0$, nabori $\{\#\}$, $\{0,\#\}$ in $\{\wedge,\vee,\#\}$ niso polni, saj vsi trije ohranjajo logično 0. Nabor $\{\neg,\#\}$ pa je poln, saj lahko z vezniki tega nabora izrazimo veznike znanega polnega nabora $\{\neg,\wedge\}$. Namreč:
$$\neg p \sim \neg p,$$
$$p \wedge q \sim (\neg p)\#q.$$
c. Ker je $p \star q \sim q\#p$, vidimo, da nabora $\{\star\}$ in $\{\#,\star\}$ nista polna, saj ohranjata logično 0. Nabor $\{\neg,\star\}$ je poln, saj lahko veznike (po b.) znanega polnega nabora $\{\neg,\#\}$ izrazimo z $\neg$ in $\star$. Tudi nabor $\{1,\star\}$ je poln:
$$\neg p \sim 1 \wedge \neg p \sim 1 \star p,$$
$$p \wedge q \sim p \star (1 \star q),$$
saj smo veznike znanega polnega nabora $\{\neg,\wedge\}$ izrazili z 1 in $\star$.

Rešitev naloge 9. ⇧

a. Oglejmo si resničnostjo tabelo izraza $A(p,q,X) = (p \Rightarrow q) \wedge X$:

p	q	X	$(p \Rightarrow q) \wedge X$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Od tu lahko preberemo, kako je izraz X odvisen od spremenljivk p in q:

p	q	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0 ali 1
1	1	0

Vidimo, da sta rešitvi dve. Prva ima resničnostno tabelo 0000, torej $X_1 \sim 0$, druga pa 0010, torej $X_2 \sim \neg(p \Rightarrow q)$.

b. Če lahko zgolj z uporabo veznika A izrazimo X_1, potem smo seveda zgolj z A izrazili protislovje. Denimo, da lahko samo z uporabo veznika A izrazimo $X_2 \sim \neg(p \Rightarrow q)$. Potem je
$$0 \sim (p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q) \sim A(p,q,\neg(p \Rightarrow q))$$
in ker lahko tretji argument zapišemo zgolj z uporabo veznika A, smo spet uspeli 0 izraziti zgolj z uporabo veznika A.

c. Ker je $A(1,1,1) \sim 1$, veznik A ohranja enice. Samo z veznikom A torej ne bomo mogli izraziti protislovja, saj protislovje tudi v primeru, ko so vsi vhodi 1 vrne 0.

Rešitev naloge 10.

a. Velja

$$\begin{aligned}
1 &\sim p \Rightarrow 1 \\
&\sim p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg p) \\
&\sim A(p,p,p), \\
p \Rightarrow q &\sim p \Rightarrow \neg(\neg q) \\
&\sim p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow 0) \\
&\sim p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg 1) \\
&\sim A(p,q,1) \\
&\sim A(p,q,A(p,p,p)), \\
p \Rightarrow (r \Rightarrow q) &\sim p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r) \\
&\sim A(p,q,r).
\end{aligned}$$

b. V prejšnji točki smo videli, da je $A(p,p,p) \sim 1$. Torej je tudi $A(1,1,1) \sim 1$ in veznik A ohranja enice. To pomeni, da nabori $\{A\}$ $\{A,\wedge\}$ in $\{A,\Rightarrow\}$ niso polni, saj tudi $\wedge$ in $\Rightarrow$ ohranjata enice. Druga dva nabora enic ne ohranjata, zato sta najbrž polna. Naj bo $\mathcal{P} = \{\neg,\Rightarrow\}$. Ker je

$$\begin{aligned}
\neg p &\sim \neg p, \\
p \Rightarrow q &\sim A(p,q,A(p,p,p)),
\end{aligned}$$

znamo veznika iz $\mathcal{P}$ izraziti le z A in $\neg$ in je nabor $\{A,\neg\}$ poln. Ker je poleg tega

$$\neg p \sim p \Rightarrow 0 \sim A(p,0,A(p,p,p)),$$

znamo veznika iz $\mathcal{P}$ izraziti le z A in 0 in je nabor $\{A,0\}$ poln.

Rešitev naloge 11.

a. Hitro opazimo

$$A(p,p,p) \sim p \wedge p \Rightarrow p \sim p \Rightarrow p \sim \neg p \vee p \sim 1,$$

tj. $1 \sim A(p,p,p)$. Podobno tudi

$$A(p,p,q) \sim p \wedge p \Rightarrow q \sim p \Rightarrow q.$$

b. Ker je $p \vee q \sim \neg p \Rightarrow q$, lahko zapišemo

$$p \vee q \sim \neg p \Rightarrow q \sim A(\neg p,\neg p,q).$$

Iz $p \wedge q \sim \neg(\neg p \vee \neg q)$ pa dobimo še

$$p \wedge q \sim \neg A(p,p,\neg q).$$

c. Iz $A(p,p,p) \sim 1$ sledi $A(1,1,1) \sim 1$, torej $\{A\}$ ni poln, saj ohranja 1. Podobno tudi $\{A,1\}$ ni poln, saj oba veznika ohranjata 1. Nabor $\{A,\neg\}$ je poln, saj lahko s tema dvema veznikoma izrazimo $\{\neg,\vee\}$ po b. delu. Nabor $\{A,0\}$ je prav tako poln, saj lahko po a. delu s tem naborom izrazimo veznike (znanega polnega) nabora $\{\Rightarrow,0\}$.

Rešitev naloge 12.

Začnimo z nekaj poskusi izražanja dvomestnih veznikov z uporabo A (in 1):

$$A(p,q,q) \sim p \vee \neg(q \wedge q) \sim p \vee \neg q \sim q \Rightarrow p,$$
$$A(p,p,q) \sim p \vee \neg(p \wedge q) \sim p \vee \neg p \vee \neg q \sim 1 \text{ in podobno}$$
$$A(p,q,p) \sim 1.$$

a. Zgoraj nam $p \veebar q$ ni uspelo izraziti. Utemeljimo, da se res ne da. Videli smo, da je $A(1,1,1) \sim 1$, torej nabor $\{A,1\}$ ohranja logično 1, zato z $\{A,1\}$ ne moremo izraziti negacije $\neg$. Če bi z $\{A,1\}$ lahko izrazili $p \veebar q$, potem bi lahko izrazili tudi $\neg p$, saj je $p \veebar 1 \sim \neg p$. Z $\{A,1\}$ torej ne moremo izraziti $\veebar$.
b. To smo ugotovili zgoraj; $p \Rightarrow q \sim A(q,p,p)$.
c. V a. smo videli, da $\{A,1\}$ ni poln, saj ohranja logično 1. To hkrati pomeni, da $\{A\}$ ni poln. Ker lahko z A izrazimo $\Rightarrow$ po b., so nabori $\{A,\neg\}$, $\{A,0\}$ ter $\{A,\veebar\}$ polni nabori, saj so pripadajoči nabori, v katerih A zamenjamo z $\Rightarrow$, polni. Nabor $\{A,\Leftrightarrow\}$ pa spet ni poln, saj oba veznika v njem ohranjata logično 1.

Rešitev naloge 13.

a. Začnimo na slepo
$$A(p,q,q) \sim p \Rightarrow q \vee \neg q \sim p \Rightarrow 1 \sim 1,$$
$$A(p,q,p) \sim p \Rightarrow q \vee \neg p \sim \neg p \vee q \vee \neg p \sim \neg p \vee q \sim p \Rightarrow q.$$
Pa imamo: $p \Rightarrow q \sim A(p,q,p)$.
b. Ker je $A(1,1,1) \sim 1$, $1 \Rightarrow 1 \sim 1$ ter $1 \vee 1 \sim 1$, nabori $\{A\}$, $\{A,\Rightarrow\}$ in $\{A,\vee\}$ ohranjajo logično 1, torej niso polni. Ker sta nabora $\{\Rightarrow,\neg\}$ in $\{\Rightarrow,\veebar\}$ polna, z A pa lahko izrazimo $\Rightarrow$, sta tudi nabora $\{A,\neg\}$ in $\{A,\veebar\}$ polna.

Rešitev naloge 14.

a. Ker je $A(1,1,1) \sim 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 \wedge 1 \sim 1$, veznik A ohranja logično 1, torej nabor $\{A\}$ ni poln.
b. Z A lahko izrazimo logično 1, namreč
$$A(p,p,p) \sim p \wedge p \Rightarrow p \wedge p \sim p \Rightarrow p \sim 1,$$
torej $\{A,1\}$ ni poln, saj po a. nabor $\{A\}$ ni poln. (Če dodamo veznik, ki ga lahko izrazimo z ostalimi, potem z dodanim veznikom ne moremo izraziti novih izjavnih izrazov.)

Opazimo pa $A(1,p,q) \sim 1 \wedge p \Rightarrow 1 \wedge q \sim p \Rightarrow q$, torej
$$p \Rightarrow q \sim A(A(p,p,p),p,q).$$
Ker lahko z A izrazimo $\Rightarrow$ in sta nabora $\{\Rightarrow,0\}$ ter $\{\Rightarrow,\neg\}$ polna, sta tudi $\{A,0\}$ in $\{A,\neg\}$ polna.

Rešitev naloge 15.

a. Prvi poskus:
$$A(p,p,q) \sim p \vee q \Rightarrow p \wedge p \wedge q \sim \neg(p \vee q) \vee p \wedge q \sim \neg p \wedge \neg q \vee p \wedge q \sim p \Leftrightarrow q.$$
Drugi poskus:
$$A(p,q,p) \sim p \vee p \Rightarrow p \wedge q \wedge p \sim p \Rightarrow p \wedge q \sim \neg p \vee (p \wedge q) \sim (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$$
$$\sim 1 \wedge (p \Rightarrow q) \sim p \Rightarrow q.$$
Izrazili smo $p \Leftrightarrow q \sim A(p,p,q)$ in $p \Rightarrow q \sim A(p,q,p)$.

b. $A(p,q,r) \sim p \vee r \Rightarrow p \wedge q \wedge r \sim \neg(p \vee r) \vee p \wedge q \wedge r \sim \neg p \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge r$.
c. Ker je $A(1,1,1) \sim 1 \vee 1 \Rightarrow 1 \wedge 1 \wedge 1 \sim 1$, tj. nabor $\{A\}$ ohranja logično 1, $\{A\}$ ni poln nabor. Zaradi istega razloga tudi nabor $\{1, A\}$ ni poln. Nabor $\{A, \neg\}$ pa je poln, saj lahko po a. z njim izrazimo veznike znanega polnega nabora $\{\Rightarrow, \neg\}$.

Rešitev naloge 16.

Zapišimo najprej resničnostno tabelo izjavnega izraza $A(p,q,r)$:

p	q	r	$A(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

.

a. Najhitreje bomo opravili, če $A(p,q,r)$ zapišemo v KNO:

$$A(p,q,r) \sim (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r).$$

b. Hitro opazimo $A(p,p,p) \sim 0$, nato si ogledamo prve 4 vrstice zgornje tabele in ugotovimo

$$q \vee r \sim A(0,q,r) \sim A(A(q,q,q),q,r).$$

c. Ker A in $\vee$ ohranjata logično 0, nabora $\{A, \vee\}$ ter $\{A\}$ nista polna. Nabor $\{A, \neg\}$ je poln, saj lahko (po b.) veznike znanega polnega nabora $\{\neg, \vee\}$ izrazimo z $\neg$ in A. Poleg tega smo (v b.) ugotovili tudi $0 \sim A(p,p,p)$, torej je nabor $\{A, \Rightarrow\}$ tudi poln, saj lahko z njim izrazimo veznike znanega polnega nabora $\{\Rightarrow, 0\}$.

Rešitev naloge 17.

a. Ker je $A(1,1,1) \sim 1$, nabori $\{A\}$, $\{A, \wedge\}$ in $\{A, 1\}$ niso polni, saj vsi ohranjajo logično 1. Nabor $\{A, 0\}$ je poln, saj

$$A(0,p,q) \sim (0 \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \sim \neg p \wedge \neg q \sim \neg(p \vee q) \sim p \downarrow q,$$

tj. veznike znanega polnega nabora $\{\downarrow\}$ lahko izrazimo z A in 0.
b. Računajmo:

$$\begin{aligned}
A_1 &= p \\
A_2 &= \neg p \\
A_3 &= A(A_2, 0, A_1) \sim A(\neg p, 0, p) \sim (p \wedge 0) \vee (\neg 0 \wedge \neg p) \sim \neg p \\
A_4 &= A(A_3, 0, A_2) \sim A(\neg p, 0, \neg p) \sim (\neg p \wedge 0) \vee (\neg 0 \wedge \neg\neg p) \sim p \\
A_5 &= A(A_4, 0, A_3) \sim A(p, 0, \neg p) \sim (p \wedge 0) \vee (\neg 0 \wedge \neg\neg p) \sim p
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 18.

a. Upoštevamo opis V in dobimo

p	q	r	$V(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

.

b. Iz $V(p,p,p) \sim 0$ in prvih štirih vrstic zgornje tabele dobimo

$$p \vee q \sim V(0,p,q) \sim V(V(p,p,p),p,q).$$

Ker je $p \Leftrightarrow 0 \sim \neg p$, dobimo še

$$\neg p \vee \neg q \sim (p \Leftrightarrow 0) \vee (q \Leftrightarrow 0) \sim V(V(p,p,p),p \Leftrightarrow V(p,p,p),q \Leftrightarrow V(p,p,p)).$$

c. Nabori $\{V\}$, $\{V,0\}$, $\{V,\wedge\}$, $\{V,\vee\}$ niso polni, saj vsi vezniki v teh naborih ohranjajo logično 0. Iz zadnjih štirih vrstic zgornje tabele dobimo

$$V(1,p,q) \sim \neg(p \wedge q) \sim p \uparrow q.$$

Ker je $\{\uparrow\}$ poln nabor, je tudi $\{V,1\}$ poln. Iz $p \Leftrightarrow p \sim 1$ ugotovimo še, da lahko veznike nabora $\{V,\Leftrightarrow\}$ izrazimo z vezniki nabora $\{V,1\}$, torej je tudi $\{V,\Leftrightarrow\}$ poln nabor. (Za $\{V,\Leftrightarrow\}$ bi lahko polnost izpeljali tudi iz b. dela naloge.)

Rešitev naloge 19. ⇧

a. Poskusimo direktno:

$$C(p,q,r) \sim (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)\ ,$$

kar je že KNO izraza $C(p,q,r)$. Za DNO nadaljujemo:

$$C(p,q,r) \sim \neg p \wedge p \ \vee\ p \wedge q \ \vee\ \neg p \wedge r \ \vee\ q \wedge r \sim p \wedge q \ \vee\ \neg p \wedge r \ \vee\ q \wedge r,$$

kar je DNO.

b. Če ne v prvem, pa v drugem poskusu hitro opazimo

$$C(p,q,p) \sim (\neg p \vee q) \wedge (p \vee p) \sim \neg p \wedge p \ \vee\ q \wedge p \sim p \wedge q,$$
$$C(p,1,q) \sim (\neg p \vee 1) \wedge (p \vee q) \sim p \vee q,$$
$$C(p,q,1) \sim (\neg p \vee q) \wedge (p \vee 1) \sim p \Rightarrow q.$$

c. Ker je $C(1,1,1) \sim 1$ (t.j. veznik C ohranja logično konstanto 1), nabor $\{C\}$ ni poln. Iz enakega razloga tudi nabor $\{C,1\}$ ni poln.

Spomnimo se, nabor $\{\Rightarrow,0\}$ je poln in, ker lahko s C in 1 izrazimo $\Rightarrow$, je $\{C,0,1\}$ poln nabor. Ker je $p \wedge p \sim 1$, je torej tudi $\{C,0,\wedge\}$ poln. V b. delu smo videli, da lahko $p \wedge q$ izrazimo le z uporabo C. Ker je $\{\wedge,\neg\}$ poln nabor, mora biti tudi $\{C,\neg\}$ poln.

Rešitev naloge 20.

Poskusimo najprej poiskati protiptimer, t.j. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, da bodo vse predpostavke sklepa resnične, zaključek pa neresničen. Za neresničnost zaključka imamo le eno možnost: $p = 1$, $q = 1$, $t = 0$. Lahko sedaj dosežemo, da bodo vse predpostavke resnične le z izbiro vrednosti za r in s? Ne. Za resničnost prvih dveh predpostavk mora veljati $r = 1$ ter $s = 1$, vendar bo v tem primeru $r \Rightarrow \neg s \sim 0$. Če je katerakoli od spremenljivk r in s enaka 0, pa je ena od prvih dveh predpostavk neresnična.

Sklep torej nima protiprimera. En možen dokaz s pomočjo pravil sklepanja je spodaj.

1.	$p \Rightarrow t \vee r$	pred.
2.	$q \Rightarrow t \vee s$	pred.
3.	$r \Rightarrow \neg s$	pred.
4.1.	$p \wedge q$	pred. PS
4.2.	p	Po(4.1)
4.3.	q	Po(4.1)
4.4.	$t \vee r$	MP(4.2, 1)
4.5.	$t \vee s$	MP(4.3, 2)
4.6.	$t \vee (r \wedge s)$	Zd(4.4, 4.5)
4.7.	$\neg(r \wedge s)$	$\sim (3)$
4.8.	t	DS(4.6, 4.7)
4.	$p \wedge q \Rightarrow t$	PS(4.1, 4.8)

Rešitev naloge 21.

Oba sklepa imata enake predpostavke, le zaključka sta različna. Ker je sklep $p \models t \Rightarrow p$ pravilen, bi iz pravilnosti prvega sklepa sledila pravilnost drugega sklepa. (Podobno bi iz nepravilnosti drugega sklepa sledila nepravilnost prvega sklepa.) Tretja možnost je seveda, da je prvi sklep nepravilen, drugi pa je pravilen.

Ni težko poiskati protiprimera za prvi sklep. Za izbor vrednosti izjavnih spremenljivk

$$p \sim 0, q \sim 1, r \sim 1, s \sim 0, t \sim 0, u \sim 1$$

so vse predpostavke resnične, zaključek pa neresničen. Prvi sklep torej ni pravilen.

Drugi sklep nima protiprimera. Dokazali ga bomo z uporabo pogojnega sklepa.

1.	$p \veebar (q \wedge r)$	pred.
2.	$t \Rightarrow r \vee s$	pred.
3.	$t \Leftrightarrow \neg r$	pred.
4.	$q \Rightarrow \neg s$	pred.
5.	$u \vee t$	pred.
6.1.	t	pred. PS
6.2.	$(t \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \Rightarrow t)$	$\sim(3)$
6.3.	$t \Rightarrow \neg r$	Po(6.2)
6.4.	$\neg r$	MP(6.1, 6.3)
6.5.	$\neg r \vee \neg q$	Pd(6.4)
6.6.	$\neg(q \wedge r)$	$\sim(6.5)$
6.7.	$(p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg p \vee \neg(q \wedge r))$	$\sim(1)$
6.8.	$p \vee (q \wedge r)$	Po(6.7)
6.9.	p	DS(6.6, 6.8)
6.	$t \Rightarrow p$	PS(6.1, 6.9)

Rešitev naloge 22.

Oba sklepa imata enake predpostavke, le zaključka sta različna. Ker imata oba zaključka obliko implikacije, bomo pravilen sklep dokazali z uporabo pogojnega sklepa, zato kar zapišimo enakovredna sklepa, v katerih levo stran implikacije dodamo med predpostavke:

$$p \vee q,\ \ p \Rightarrow \neg(r \vee s),\ \ t \vee \neg q,\ \ r \quad \models \quad t,$$

$$p \vee q,\ \ p \Rightarrow \neg(r \vee s),\ \ t \vee \neg q,\ \ r \quad \models \quad s.$$

Nabor vrednosti izjavnih spremeljivk

$$p \sim 0,\ \ q \sim 1,\ r \sim 1,\ s \sim 0,\ t \sim 1$$

da protiprimer za drugi sklep. Prvi sklep nima protiprimera.

Zapišimo dokaz originalnega prvega sklepa.

1.	$p \vee q$	pred.
2.	$p \Rightarrow \neg(r \vee s)$	pred.
3.	$t \vee \neg q$	pred.
4.1.	r	pred. PS
4.2.	$r \vee s$	Pd(4.1)
4.3.	$\neg p$	MT(4.2, 2)
4.4.	q	DS(4.3, 1)
4.5.	t	DS(4.4, 3)
4.	$r \Rightarrow t$	PS(4.1, 4.5)

Rešitev naloge 23.

Poiščimo protiprimer. Zaključek tega sklepa ima obliko konjunkcije, kar pomeni, da imamo najbrž več naborov vrednosti, za katere bo neresničem. Začnimo z $r \sim 1$. Zaključek je tedaj neresničen (neodvisno od vrednosti spremenljivk s in t). Da bodo vse predpostavke resnične sedaj postavimo $t \sim 1$, $q \sim 0$, $p \sim 1$ in opazimo, da že imamo protiprimer, ne glede na logično vrednost s. Konkreten nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, ki da protiprimer je tako

$$p \sim 1, q \sim 0, r \sim 1, s \sim 0, t \sim 1.$$

Katero od izjav dodati med predpostavke, da dobimo pravilen sklep, t.j. tak, ki nima protiprimera? Pri zgornjem naboru vrednosti spremenljivk sta izjavi $q \Rightarrow t$ in $t \Rightarrow r$ resnični, torej odpadeta. Ostali dve izjavi, $q \Leftrightarrow t$ in $t \Rightarrow \neg r$, pa sta neresnični, kar pomeni, da zgornji nabor vrednosti izjavnih spremenljivk ne da protiprimera za sklepa z dodano eno od teh dveh izjav. Kateri od sklepov

$$\neg s \vee p,\ p \Rightarrow t,\ \neg q,\ r \Rightarrow t,\ q \Leftrightarrow t \quad \models \quad \neg r \wedge (s \Rightarrow t)$$

in

$$\neg s \vee p,\ p \Rightarrow t,\ \neg q,\ r \Rightarrow t,\ t \Rightarrow \neg r \quad \models \quad \neg r \wedge (s \Rightarrow t)$$

je torej pravilen? Izkaže se, da noben od teh dveh sklepov nima protiprimera, torej sta oba pravilna. Zapisali bomo dokaz drugega od teh sklepov. Ker ima zaključek obliko konjunkcije, bomo ločeno dokazali levo in desno stran konjunkcije, nato pa z združitvijo dobili originalen zaključek.

1.	$\neg s \vee p$	pred.
2.	$p \Rightarrow t$	pred.
3.	$\neg q$	pred.
4.	$r \Rightarrow t$	pred.
5.	$t \Rightarrow \neg r$	pred.
6.1.	r	pred. RA
6.2.	$\neg t$	MT(6.1, 5)
6.3.	t	MP(6.1, 4)
6.4.	$t \wedge \neg t$	Zd(6.3, 6.2)
6.5.	0	$\sim$ (6.4)
6.	$\neg r$	RA(6.1, 6.5)
7.1.	s	pred. PS
7.2.	p	DS(7.1, 1)
7.3.	t	MP(7.2, 2)
7.	$s \Rightarrow t$	PS(7.1, 7.3)
8.	$\neg r \wedge (s \Rightarrow t)$	Zd(6, 7)

Rešitev naloge 24.

Zaključek prvega sklepa je neresničen za logični vrednosti $p \sim 0$ ter $s \sim 0$. Vendar sedaj ni mogoče izbrati logičnih vrednosti za q in r, da bi bile vse predpostavke resnične.

Prvi sklep torej nima protiprimera in je pravilen. Zapišimo dokaz.

1.	$p \vee q$	pred.
2.	$p \vee r \Rightarrow \neg q$	pred.
3.	$s \vee r$	pred.
4.1.	$\neg p$	pred. PS
4.2.	q	DS(4.1, 1)
4.3.	$\neg(p \vee r)$	MT(4.2, 2)
4.4.	$\neg p \wedge \neg r$	$\sim$ (4.3)
4.5.	$\neg r$	Po(4.4)
4.6.	s	DS(4.5, 3)
4.	$\neg p \Rightarrow s$	PS(4.1, 4.6)

Oglejmo si še drugi sklep. Zaključek bo neresničen, če izberemo $p \sim 0$ ter $t \sim 0$. Če sedaj postavimo še $r \sim 0$ in $s \sim 1$, postanejo vse predpostavke resnične (neodvisno od logične vrednosti q). Imamo protiprimer in drugi sklep je nepravilen.

Rešitev naloge 25.

Razmišljajmo v smislu dokaza s protislovjem in dodajmo negacijo zaključka med predpostavke. Sklepoma iz naloge sta torej enakovredna sklepa

$$p \vee q,\ r \wedge s,\ p \Rightarrow \neg r,\ \neg s \vee t \Rightarrow \neg q,\ t \quad \models \quad 0 \quad \text{in}$$
$$p \vee q,\ r \wedge s,\ p \Rightarrow \neg r,\ \neg s \vee t \Rightarrow \neg q,\ \neg t \quad \models \quad 0.$$

Ker sta oba zaključka že 0, bomo protiprimer dobili, če nam uspe doseči, da so vse predpostavke resnične. Za prvi sklep to pomeni (če začnemo nekje pri koncu) $t \sim 1$, $q \sim 0$, $p \sim 1$, $r \sim 0$ in vidimo, da ne gre naprej, saj ne moremo več doseči, da bi bila predpostavka $r \wedge s$ resnična. Pri drugem sklepu pa nabor vrednosti $t \sim 0$, $r \sim 1$, $s \sim 1$, $p \sim 0$, $q \sim 1$ da protiprimer.

Drugi sklep torej ni pravilen, prvi pa je. Dokažimo ga kar direktno.

1.	$p \vee q$	pred.
2.	$r \wedge s$	pred.
3.	$p \Rightarrow \neg r$	pred.
4.	$\neg s \vee t \Rightarrow \neg q$	pred.
5.	r	Po(2)
6.	$\neg p$	MT(5, 3)
7.	q	DS(6, 1)
8.	$\neg(\neg s \vee t)$	MT(7, 4)
9.	$s \wedge \neg t$	$\sim$ (8)
10.	$\neg t$	Po(9)

Rešitev naloge 26.

Za nabor vrednosti izjavnih spremenljivk

$$p \sim 0,\ \ q \sim 1,\ r \sim 0,\ \ s \sim 0 \text{ in } t \sim 0$$

so predpostavke drugega sklepa resnične, zaključek pa je neresničen. Drugi sklep torej ni pravilen, saj ima protiprimer.

Prvi sklep nima protiprimera. Zapišimo zaključek v enakovredni obliki

$$\neg s \Rightarrow (\neg p \vee t) \sim \neg s \Rightarrow (p \Rightarrow t)$$

in ga dokažimo z dvakratno uporabo pogojnega sklepa.

1.	$p \wedge q \Rightarrow r \vee s$	pred.
2.	$s \vee (\neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t))$	pred.
3.1.	$\neg s$	pred. PS
3.2.	$\neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t)$	DS(3.1, 2)
3.3.	$\neg r$	Po(3.2)
3.4.	$\neg r \wedge \neg s$	Zd(3.3, 3.1)
3.5.	$\neg(r \vee s)$	$\sim$ (3.4)
3.6.	$\neg(p \wedge q)$	MT(3.5, 1)
3.7.	$\neg p \vee \neg q$	$\sim$ (3.6)
3.8.1.	p	pred. PS
3.8.2.	$\neg q$	DS(3.8.1, 3.7)
3.8.3.	$\neg q \Rightarrow t$	Po(3.2)
3.8.4.	t	MP(3.8.2, 3.8.3)
3.8.	$p \Rightarrow t$	PS(3.8.1, 3.8.4)
3.9.	$\neg p \vee t$	$\sim$ (3.8)
3.	$\neg s \Rightarrow (\neg p \vee t)$	PS(3.1, 3.9)

Rešitev naloge 27.

Oba sklepa imata enak zaključek. Ta bo neresničen za vrednosti $p \sim 1$, $q \sim 0$ in $s \sim 0$. Edina razlika med sklepoma je v tretji predpostavki. Za izbiro vrednosti $r \sim 1$ ter $t \sim 1$ postanejo vse predpostavke drugega sklepa resnične, predpostavka $p \Rightarrow \neg r$ prvega sklepa pa je neresnična. Drugi sklep torej ni pravilen.

Ker nam tudi druge izbire logičnih vrednosti za r in s ne dajo protiprimera za prvi sklep, je ta pravilen. Zapišimo dokaz.

1.	$(\neg t \vee q) \vee r$	pred.
2.	$\neg t \Rightarrow \neg p$	pred.
3.	$p \Rightarrow \neg r$	pred.
4.1.	p	pred. PS
4.2.	$\neg r$	MP(4.1, 3)
4.3.	$\neg t \vee q$	DS(4.2, 1)
4.4.	t	MT(4.1, 2)
4.5.	q	DS(4.4, 4.3)
4.6.	$q \vee s$	Pd(4.5)
4.	$p \Rightarrow q \vee s$	PS(4.1, 4.6)

Rešitev naloge 28.

Sklepa se razlikujeta le v zaključku. Z izbiro logičnih vrednosti

$$p \sim 1,\ \ q \sim 0, r \sim 0, s \sim 1, t \sim 1 \text{ in } \ u \sim 1$$

dobimo protiprimer za drugi sklep.

Prvi sklep nima protiprimera, zato zapišemo njegov dokaz.

1.	$p \wedge (r \vee s)$	pred.
2.	$(\neg t \vee r) \Rightarrow \neg p$	pred.
3.	$(s \wedge q) \Rightarrow (\neg t \vee u)$	pred.
4.	p	Po(1)
5.	$\neg(\neg t \vee r)$	MT(4, 2)
6.	$t \wedge \neg r$	$\sim$ (5)
7.	$\neg r$	Po(6)
8.	$r \vee s$	Po(1)
9.	s	DS(7, 8)
10.1.	q	pred. PS
10.2.	$s \wedge q$	Zd(9, 10.1)
10.3.	$\neg t \vee u$	MP(10.2, 3)
10.4.	t	Po(6)
10.5.	u	DS(10.4, 10.3)
10.	$q \Rightarrow u$	PS(10.1, 10.5)

Rešitev naloge 29.

Poskusimo kar zapisati dokaz. Ker je zaključek tega sklepa konjunkcija dveh implikacij, lahko dvakrat uporabimo pogojni sklep.

1.	$\neg q \Rightarrow \neg p \vee r,$	pred.
2.	$q \Rightarrow \neg p$	pred.
3.	$\neg(s \wedge r)$	pred.
4.	$\neg s \vee \neg r$	$\sim (3)$
5.1.	p	pred. PS
5.2.	$\neg q$	MT(5.1, 2)
5.3.	$\neg p \vee r$	MP(5.2, 1)
5.4.	r	DS(5.1, 5.3)
5.5.	$\neg s$	DS(5.4, 4)
5.	$p \Rightarrow \neg s$	PS(5.1, 5.5)
6.1.	s	pred. PS
6.2.	$\neg r$	DS(6.1, 4)
6.3.1.	p	pred. RA
6.3.2.	$p \wedge \neg r$	Zd(6.2, 6.3.1)
6.3.3.	$\neg(\neg p \vee r)$	$\sim (6.3.2)$
6.3.4.	q	MT(6.3.3, 1)
6.3.5.	$\neg q$	MT(6.3.1, 2)
6.3.6.	$q \wedge \neg q$	Zd(6.3.4, 6.3.5)
6.3.7.	0	$\sim (6.3.6)$
6.3.	$\neg p$	RA(6.3.1, 6.3.7)
6.	$s \Rightarrow \neg p$	PS(6.1, 6.3)
7.	$(p \Rightarrow \neg s) \wedge (s \Rightarrow \neg p)$	Zd(5, 6)

Rešitev naloge 30.

Ta sklep nima protiprimera. Zapišimo dokaz.

1.	$p \vee t$	pred.
2.	$t \vee u \Rightarrow r \vee s$	pred.
3.	$t \Rightarrow \neg s$	pred.
4. 1.	$\neg(p \vee r)$	pred. RA
4. 2.	$\neg p \wedge \neg r$	$\sim (4.1)$
4. 3.	$\neg p$	Po(4.2)
4. 4.	t	DS(4.3, 1)
4. 5.	$\neg s$	MP(4.4, 3)
4. 6.	$\neg r$	Po(4.2)
4. 7.	$\neg r \wedge \neg s$	Zd(4.6, 4.5)
4. 8.	$\neg(r \vee s)$	$\sim (4.7)$
4. 9.	$\neg(t \vee u)$	MT(4.8, 2)
4.10.	$t \wedge \neg(t \vee u)$	Zd(4.4, 4.9)
4.11.	0	$\sim (4.10)$
4.	$p \vee r$	RA(4.1, 4.11)

Če zaključek zamenjamo s p, dobimo sklep

$$p \vee t, \quad t \vee u \Rightarrow r \vee s, \quad t \Rightarrow \neg s \quad \models \quad p.$$

Ta sklep pa ni pravilen. Izbor logičnih vrednosti

$$p \sim 0, \; r \sim 1, \; s \sim 0 \text{ in } t \sim 1$$

nam namreč (neodvisno od logične vrednosti u) da protiprimer.

Rešitev naloge 31.

Ker ima zaključek obliko implikacije, si bomo pomagali s pogojnim sklepom.

1.	$r \vee s \Rightarrow q \wedge r$	pred.
2.	$r \vee s \vee t$	pred.
3.	$\neg t \wedge r \Rightarrow p$	pred.
4.1.	$\neg t$	pred. PS
4.2.	$r \vee s$	DS(4.1, 2)
4.3.	$q \wedge r$	MP(4.2, 1)
4.4.	r	Po(4.3)
4.5.	$\neg t \wedge r$	Zd(4.1, 4.4)
4.6.	p	MP(4.5, 3)
4.7.	$p \wedge q \wedge r$	Zd(4.6, 4.3)
4.8.	$p \wedge q$	Po(4.7)
4.	$\neg t \Rightarrow p \wedge q$	PS(4.1, 4.8)

Rešitev naloge 32.

Za nabor vrednosti $p \sim 0$, $q \sim 0$, $r \sim 0$ in $t \sim 0$ so vse predpostavke prvega sklepa resnične, zaključek p pa seveda neresničen, zato prvi sklep ni pravilen. (Ta nabor vrednosti ne predstavlja edinega protiprimera za ta sklep.)

Drugi sklep nima protiprimera. Zapišimo dokaz.

1.	$r \Rightarrow q \vee t$	pred.
2.	$t \Rightarrow \neg p$	pred.
3.	$\neg q \vee \neg p$	pred.
4.	$p \Rightarrow r$	pred.
5.1.	p	pred. RA
5.2.	r	MP(5.1, 4)
5.3.	$\neg q$	DS(5.1, 3)
5.4.	$q \vee t$	MP(5.2, 1)
5.5.	t	DS(5.3, 5.4)
5.6.	$\neg p$	MP(5.5, 2)
5.7.	$p \wedge \neg p$	Zd(5.1, 5.6)
5.8.	0	$\sim$ (5.7)
5.	$\neg p$	RA(5.1, 5.8)

Rešitev naloge 33.

a. Če zaključek zapišemo v enakovredni obliki $s \vee \neg r \sim r \Rightarrow s$, lahko ta sklep zapišemo v enakovredni obliki

$$p \vee q,\ q \Rightarrow \neg r,\ \neg p \vee r,\ s \vee (p \Leftrightarrow q),\ r\ \models\ s.$$

Poskusimo poiskati protiprimer. Če postavimo $s \sim 0$, $r \sim 1$, $p \sim 1$, $q \sim 1$, so vse predpostavke razen $q \Rightarrow \neg r$ resnične, ne moremo pa doseči (tudi z drugačno izbiro logičnih vrednosti izjavnih spremeljivk), da bi bile vse predpostavke resnične. Nimamo protiprimera.

Zapisali bomo dokaz z uporabo pogojnega sklepa (v smislu enakovrednosti $s \vee \neg r \sim r \Rightarrow s$).

1.	$p \vee q$	pred.
2.	$q \Rightarrow \neg r$	pred.
3.	$\neg p \vee r$	pred.
4.	$s \vee (p \Leftrightarrow q)$	pred.
5.1.	r	pred. PS
5.2.	$\neg q$	MT(5.1, 2)
5.3.	$\neg p \vee \neg q$	Pd(5.2)
5.4.	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	Zd(1, 5.3)
5.5.	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$\sim$ (5.4)
5.6.	s	DS(5.5, 4)
5.	$r \Rightarrow s$	PS(5.1, 5.6)
6.	$s \vee \neg r$	$\sim$ (5)

b. Tudi ta sklep nima protiprimera. Za protiprimer mora namreč biti $q \sim 1$, da bo zaključek $\neg q$ neresničen. Vendar s to vrednostjo za q nikakor ne moremo doseči, da bi bile vse predpostavke resnične.

Zapišimo še dokaz tega sklepa. Uporabili bomo dokaz s protislovjem.

1.	$p \vee q$	pred.
2.	$q \Rightarrow \neg r$	pred.
3.	$\neg p \Rightarrow r$	pred.
4.	$p \veebar q$	pred.
5.	$\neg(s \vee r)$	pred.
6.	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	$\sim (4)$
7.	$\neg p \vee \neg q$	Po(7)
8.1.	q	pred. RA
8.2.	$\neg r$	MP(8.1, 2)
8.3.	p	MT(8.2, 3)
8.4.	$\neg p$	DS(8.1, 7)
8.5.	$p \wedge \neg p$	Zd(8.3, 8.4)
8.6.	0	$\sim (8.5)$
8.	$\neg q$	RA(8.1, 8.6)

Rešitev naloge 34.

a. Da bo zaključek neresničen, mora veljati $t \sim 0$. (In seveda $r \sim 1$ ali $s \sim 1$, vendar počakajmo z izbiro teh vrednosti.) Da bodo predpostavke, pri tej izbiri resnične, moramo postaviti $p \sim 0$, $q \sim 0$, $r \sim 0$ ter $s \sim 1$. Pri tej izbiri je zaključek neresničen, imamo protiprimer.

b. Pri zgornji izbiri vrednosti je izjava $s \Rightarrow p \wedge q$ neresnična, izjavi $p \Rightarrow q \wedge s$ ter $q \Rightarrow p \wedge s$ pa resnični. Sklep bo torej kvečjemu pravilen, če med predpostavke dodamo prvo izjavo. Zapišimo dokaz tega sklepa.

1.	$s \vee p$	pred.
2.	$p \Rightarrow t$	pred.
3.	$\neg q$	pred.
4.	$r \Rightarrow t$	pred.
5.	$s \Rightarrow p \wedge q$	pred.
6.	$\neg q \vee \neg p$	Pd(3)
7.	$\neg(p \wedge q)$	$\sim (6)$
8.	$\neg s$	MT(7, 5)
9.	p	DS(8, 1)
10.	t	MP(9, 2)
11.	$t \vee \neg(r \vee s)$	Pd(10)
12.	$(r \vee s) \Rightarrow t$	$\sim (11)$

Rešitev naloge 35.

a. Zapišimo te tri sklepe eksplicitno:

$$p \vee r,\ q \Rightarrow \neg p \models p \wedge q, \qquad p \vee r,\ q \Rightarrow \neg p \models q \Rightarrow r, \qquad p \vee r,\ q \Rightarrow \neg p \models \neg r.$$

Vrednosti $p \sim 1$, $q \sim 0$ in $r \sim 0$ nam dajo protiptimer za prvi in tretji sklep. Drugi sklep nima protiprimera. Napačna sta torej prvi in tretji sklep.

b. Drugi sklep nima protiprimera in je pravilen. Zapišimo dokaz.

1. $p \vee r$	pred.
2. $q \Rightarrow \neg p$	pred.
3. $\neg p \Rightarrow r$	$\sim (1)$
4. $q \Rightarrow r$	HS(2, 3)

c. Vsi trije sklepi bodo pravilni, če dodamo npr. predpostavko $P_3 = 0$, t.j. protislovje, saj je vsak sklep oblike $0 \models B$ pravilen.

Rešitev naloge 36.

a. Poiščimo protiprimer. Da bo zaključek neresničen, mora biti $r \sim 0$ in $t \sim 0$. Če sedaj postavimo še $q \sim 0$, $p \sim 0$ ter $s \sim 1$, postanejo vse predpostavke resnične. Imamo protiprimer.

b. Pri izboru vrednosti logičnih spremenljivk, ki nam dajo protiprimer, so resnične tudi izjave P_2, P_3 in P_4. Sklepi, ki ji dobimo, ko dodamo katerokoli od teh izjav, torej ostanejo nepravilni.

Če dodamo, P_1 pa dobimo sklep

$$p \wedge \neg q \Rightarrow r,\ p \vee s,\ q \Rightarrow t,\ \neg t,\ s \Rightarrow t \quad \models \quad t \vee r,$$

ki nima protiprimera. Zapišimo dokaz tega sklepa.

1. $p \wedge \neg q \Rightarrow r$	pred.
2. $p \vee s$	pred.
3. $q \Rightarrow t$	pred.
4. $\neg t$	pred.
5. $s \Rightarrow t$	pred.
6. $\neg s$	MT(4, 5)
7. p	DS(6, 2)
8. $\neg q$	MT(4, 3)
9. $p \wedge \neg q$	Zd(7, 8)
10. r	MP(9, 1)
11. $t \vee r$	Pd(10)

2. Predikatni račun

Rešitev naloge 37.

Preoblikujemo formulo A:

$$\begin{aligned}
A &\sim \neg\forall x\,(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists x\,(P(x)\Rightarrow Q(x))\\
&\sim \exists x\,\neg(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists x\,(P(x)\Rightarrow Q(x))\\
&\sim \exists x\,(\neg P(x)\vee Q(x))\vee\exists x\,(P(x)\Rightarrow Q(x))\\
&\sim \exists x\,(P(x)\Rightarrow Q(x))\vee\exists x\,(P(x)\Rightarrow Q(x))\\
&\sim \exists x\,(P(x)\Rightarrow Q(x)).
\end{aligned}$$

Brez težav lahko najdemo interpretacijo v kateri bo imela formula logično vrednost 0. Izberimo na primer področje pogovora $\mathcal{D}=\mathbb{N}$, predikata P in Q pa tako, da bo P ves čas veljaven in Q ves čas napačen. Na primer:

$$\begin{aligned}
P(x) &= x \text{ je nenegativno število,}\\
Q(x) &= x^2 \text{ je negativno število.}
\end{aligned}$$

V tej interpretaciji je formula A enakovredna $\exists x\,(1\Rightarrow 0)\sim 0$, zato A ni splošno veljavna formula.
Preoblikujemo še formulo B:

$$\begin{aligned}
B &\sim \neg\forall x\,(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists x\,(Q(x)\Rightarrow P(x))\\
&\sim \neg\forall x\,(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists x\,(\neg Q(x)\vee P(x))\\
&\sim \exists x\,\neg(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists x\,(\neg Q(x)\vee P(x))\\
&\sim \exists x\,(\neg P(x)\vee Q(x))\vee\exists x\,(\neg Q(x)\vee P(x))\\
&\sim \exists x\,(\neg P(x)\vee Q(x)\vee\neg Q(x)\vee P(x))\\
&\sim \exists x\,(\neg P(x)\vee 1\vee P(x))\\
&\sim \exists x: 1\\
&\sim 1.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je formula B splošno veljavna.

Rešitev naloge 38.

Najprej preoblikujemo formulo A:

$$\begin{aligned}
A &\sim \forall z\exists y\ (R(z,y)\vee\forall w\,\neg R(y,w))\\
&\sim \forall z\,(\exists y\,R(z,y)\vee\exists y\forall w\,\neg R(y,w))\\
&\sim \forall z\exists y\,R(z,y)\vee\exists y\forall w\,\neg R(y,w)\\
&\sim \forall x\exists y\,R(x,y)\vee\exists y\forall w\,\neg R(y,w)\\
&\sim \forall x\exists y\,R(x,y)\vee\exists x\forall y\,\neg R(x,y)\\
&\sim \forall x\exists y\,R(x,y)\vee\neg\forall x\exists y\,R(x,y)\\
&\sim 1.
\end{aligned}$$

Formula A je torej splošno veljavna. Oglejmo si še formulo B. Označimo $B_1=\forall x\exists y\,R(x,y)$ in $B_2=\exists x\forall y\,R(x,y)$. Za področje pogovora vzemimo $\mathcal{D}=\mathbb{N}$, za predikat pa

$$R(x,y) = x \text{ je strogo večji } y.$$

Potem je

$$B_1 = \text{Za vsako naravno število } x \text{ obstaja naravno število } y\text{, ki je strogo manjše.}$$

To seveda ni res, ker nobeno naravno število y ni strogo manjše od $x = 0$. Po drugi strani je

$B_2 =$ Obstaja naravno število x, da so vsa naravna števila y strogo manjša.

Tudi to seveda ni res, ker na primer $y = x$ ni strogo manjši od samega sebe. Torej je $B = B_1 \vee B_2 \sim 0 \vee 0 \sim 0$ v tej interpretaciji napačna. Formula B torej ni splošno veljavna in ni enakovredna formuli A.

Rešitev naloge 39.

a. Preoblikujemo formulo A:

$$\begin{aligned} A &\sim \exists x(\neg\forall y\, P(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \\ &\sim \exists x\neg\forall y\, P(x,y) \vee \exists x\forall y\, R(x,y) \\ &\sim \neg\forall x\forall y\, P(x,y) \vee \exists x\forall y\, R(x,y). \end{aligned}$$

Zdaj pa poskusimo preoblikovati formulo B tako, da dobimo isto:

$$\begin{aligned} B &\sim \exists x(\neg\forall y\, P(y,x) \vee \forall y\, R(x,y)) \\ &\sim \exists x\neg\forall y\, P(y,x) \vee \exists x\forall y\, R(x,y)) \\ &\sim \neg\forall x\forall y\, P(y,x) \vee \exists x\forall y\, R(x,y)) \\ &\sim \neg\forall y\forall x\, P(x,y) \vee \exists x\forall y\, R(x,y)) \\ &\sim \neg\forall x\forall y\, P(x,y) \vee \exists x\forall y\, R(x,y)). \end{aligned}$$

Formuli A in B sta torej ekvivalentni.

b. Preoblikujemo še formulo C:

$$\begin{aligned} C &\sim \exists x(\neg\forall y\, P(x,y) \vee \forall y\, R(y,x)) \\ &\sim \exists x\neg\forall y\, P(x,y) \vee \exists x\forall y\, R(y,x)) \\ &\sim \neg\forall x\forall y\, P(x,y) \vee \exists x\forall y\, R(y,x)). \end{aligned}$$

Označimo $X = \neg\forall x\forall y\, P(x,y)$, $Y = \exists x\forall y\, R(x,y)$ in $Z = \exists x\forall y\, R(y,x)$. Potem je $A = X \vee Y$ in $C = X \vee Z$. Poiskali bomo interpretacijo, v kateri bosta imela X in Z vrednost 0, Y pa vrednost 1. Potem bo v tej interpretaciji $A \sim 1$ in $C \sim 0$, in bomo s tem pokazali, da formuli nista enakovredni. Naj bo področje pogovora $\mathcal{D} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x \leq y \text{ ali pa } y \leq x, \\ R(x,y) &= x \text{ deli } y. \end{aligned}$$

Potem je:

X = Ni res, da za vsa naravna števila x in y velja, da je x manjši ali enak y ali y manjši ali enak x.

Y = Obstaja naravno število x, ki deli vsa naravna števila y.

Z = Obstaja naravno število x, ki je deljivo z vsemi naravnimi števili y.

Seveda je $X \sim 0$, $Y \sim 1$, ker $x = 1$ res deli vsa naravna števila, in $Z \sim 0$, ker nobeno naravno število ni deljivo z vsemi ostalimi.

Rešitev naloge 40.

Formule preoblikujemo. Pomagamo si z dejstvom, da lahko vrstni red istovrstnih kvantifikatorjev poljubno spremenimo:

$$\begin{aligned}
A &\sim \exists x\,(\neg\forall y\,P(x,y) \lor \exists y\,R(x,y))\\
&\sim \exists x\,(\exists y\,\neg P(x,y) \lor \exists y\,R(x,y))\\
&\sim \exists x\exists y\,\neg P(x,y) \lor \exists x\exists y\,R(x,y),\\
B &\sim \exists y\,(\neg\forall x\,P(x,y) \lor \exists x\,R(x,y))\\
&\sim \exists y\,(\exists x\,\neg P(x,y) \lor \exists x\,R(x,y))\\
&\sim \exists y\exists x\,\neg P(x,y) \lor \exists y\exists x\,R(x,y))\\
&\sim \exists x\exists y\,\neg P(x,y) \lor \exists x\exists y\,R(x,y)),\\
C &\sim \neg(\exists x\forall y\,P(x,y)) \lor \exists x\exists y\,R(x,y)\\
&\sim \forall x\exists y\,\neg P(x,y) \lor \exists x\exists y\,R(x,y).
\end{aligned}$$

Vidimo, da sta formuli A in B enakovredni. Poiščimo še interpretacijo, ki bo pokazala, da formuli A in C nista enakovredni. Naj bo področje pogovora $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= x \text{ deli } y,\\
R(x,y) &= 0.
\end{aligned}$$

Označimo $X = \exists x\exists y\,\neg P(x,y)$, $Y = \exists x\exists y\,R(x,y)$ in $Z = \forall x\exists y\,\neg P(x,y)$. Potem je

$$\begin{aligned}
X &= \text{Obstajata naravni števili } x \text{ in } y\text{, taki da } x \text{ ne deli } y.\\
Z &= \text{Za vsa naravna števila } x \text{ obstaja naravno število } y\text{, ki ga } x \text{ ne deli.}
\end{aligned}$$

Seveda je $X \sim 1$, vzamemo lahko na primer $x = 2$ in $y = 3$. Prav tako je očitno $Y \sim 0$. Poleg tega je tudi $Z \sim 0$, ker za $x = 1$ tak y ne obstaja. Sledi, da je $A \sim 1 \lor 0 \sim 1$ in $C \sim 0 \lor 0 \sim 0$. Formuli A in C v tej interpretaciji torej nista enakovredni.

Rešitev naloge 41.

Formula A je že v preneksni obliki. Do preneksne oblike preoblikujemo še formuli B in C:

$$\begin{aligned}
B &= \exists x\,P(x) \lor \exists x\,Q(x) \sim \exists x\,(P(x) \lor Q(x)),\\
C &= \exists x\,P(x) \lor \exists y\,Q(y) \sim \exists x\,P(x) \lor \exists x\,Q(x)\\
&\sim \exists x\,(P(x) \lor Q(x)).
\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$\exists x\,F_1 \lor \exists x\,F_2 = \exists x\,(F_1 \lor F_2).$$

Vse tri formule so torej enakovredne.

Rešitev naloge 42.

Najprej poiščemo interpretacijo, v kateri bosta imeli formuli A in B različno vrednost. Naj bo $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$ in naj bo $P(x) = 1$ in $R(x) = 0$ za vse $x \in \mathcal{D}$. Formuli A in B se v tem primeru poenostavita v:

$$\begin{aligned}
A &\sim \forall x\exists y\,\neg(P(x) \land Q(x,y))\\
&\sim \forall x\exists y\,\neg Q(x,y),\\
B &\sim \exists y\forall x\,\neg(P(x) \land Q(x,y))\\
&\sim \exists y\forall x\,\neg Q(x,y).
\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je $X \Rightarrow 0 \sim \neg X$ in $1 \land X \sim X$. Naj bo še

$$Q(x,y) = x \text{ deli } y.$$

Potem formuli A in B trdita

A = Za vsako naravno število $x \geq 2$ obstaja naravno število $y \geq 2$, ki ga x ne deli.

B = Obstaja naravno število $y \geq 2$, ki ni deljivo z nobenim naravnim številom $x \geq 2$.

Seveda je trditev A resnična. Za vsak $x \in \mathcal{D}$ na primer število $y = x + 1$ ne bo deljivo z x. Trditev B pa je napačna, ker je vsako naravno število $y \geq 2$ deljivo s samim seboj. Trditvi A in B zato nista enakovredni. Trditvi C in D preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
C &\sim \exists x \forall y\, (\neg(P(x) \wedge Q(y,y)) \vee R(x)) \\
&\sim \exists x \forall y\, (\neg P(x) \vee \neg Q(y,y) \vee R(x)) \\
&\sim \exists x \forall y\, (\neg P(x) \vee R(x) \vee \neg Q(y,y)) \\
&\sim \exists x\, (\neg P(x) \vee R(x) \vee \forall y\, \neg Q(y,y)) \\
&\sim \exists x\, (\neg P(x) \vee R(x)) \vee \forall y\, \neg Q(y,y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &\sim \forall y \exists x\, (\neg(P(x) \wedge Q(y,y)) \vee R(x)) \\
&\sim \forall y \exists x\, (\neg P(x) \vee \neg Q(y,y) \vee R(x)) \\
&\sim \forall y\, (\exists x\, (\neg P(x) \vee R(x)) \vee \neg Q(y,y)) \\
&\sim \exists x\, (\neg P(x) \vee R(x)) \vee \forall y\, \neg Q(y,y).
\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$\forall x\, (F_1 \vee F_2) = F_1 \vee \forall x\, F_2 \quad \text{in} \quad \exists x\, (F_1 \vee F_2) = F_1 \vee \exists x\, F_2,$$

če spremenljivka x v formuli F_1 ne nastopa. Vidimo, da sta trditvi C in D enakovredni.

Rešitev naloge 43.

Formule preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
A &\sim \exists x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) \\
&\sim \exists x\, (P(x) \wedge \exists y\, Q(y)) \\
&\sim \exists x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &\sim \exists x\, \neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \\
&\sim \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &\sim \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \\
&\sim \exists x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) \\
&\sim \exists x\, (P(x) \wedge \exists y\, Q(y)) \\
&\sim \exists x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &\sim \exists x\, \neg P(x) \vee \exists x\, \neg Q(x) \\
&\sim \exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y) \\
&\sim \exists x\, (\neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y)) \\
&\sim \exists x \exists y\, (\neg P(x) \vee \neg Q(y)) \\
&\sim \exists x \exists y\, \neg(P(x) \wedge Q(y)).
\end{aligned}$$

Vidimo, da sta A in C enakovredni. Pokažemo še, da formula A ni enakovredna formuli B in formuli D ter da formuli B in D nista enakovredni. Naj bo področje pogovora $\mathcal{D} = \{a, b\}$ in naj bo

$$P(a) = 1,\ P(b) = 0,\ Q(a) = 0,\ Q(b) = 1.$$

Potem je formula A veljavna, ker lahko vzamemo $x = a$ in $y = b$. Formula B ni veljavna, ker je

$$P(a) \wedge Q(a) \sim 1 \wedge 0 \sim 0 \text{ in } \ P(b) \wedge Q(b) \sim 0 \wedge 1 \sim 0.$$

Formula D je veljavna, ker lahko vzamemo na primer $x = y = a$ in je

$$\neg(P(a) \wedge Q(a)) \sim \neg(1 \wedge 0) \sim \neg 0 \sim 1.$$

S to interpretacijo smo torej pokazali, da formula B ni enakovredna A in D. Naj bo zdaj področje pogovora $\mathcal{D} = \{a\}$ in naj bo

$$P(a) = 1, \ Q(a) = 1.$$

Potem je formula A očitno veljavna, formula D pa ne, zato tudi A in D nista enakovredni.

Rešitev naloge 44.

Formule preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
A &\sim \exists x\,(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee \exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \\
&\sim \exists x\,(\neg P(x) \vee Q(x) \vee P(x) \vee Q(x)) \\
&\sim \exists x\,(\neg P(x) \vee P(x) \vee Q(x) \vee Q(x)) \\
&\sim \exists x\,(1 \vee Q(x) \vee Q(x)) \\
&\sim \exists x\colon 1 \\
&\sim 1, \\
B &\sim \exists x\,(\neg P(x) \vee Q(x)) \\
&\sim \exists x\,\neg P(x) \vee \exists x\, Q(x) \\
&\sim \exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\, Q(y), \\
C &\sim \neg\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \\
&\sim \forall x\,\neg P(x) \vee \exists x\, Q(x) \\
&\sim \forall x\,\neg P(x) \vee \exists y\, Q(y).
\end{aligned}$$

Vidimo, da sta formuli A in D enakovredni. Pokažimo še, da formuli B in C nista enakovredni in da nobena od njiju ni splošno veljavna. Naj bo področje pogovora $\mathcal{D} = \{a, b\}$ in naj bo

$$P(a) = 1, \ P(b) = 0, \ Q(a) = 0, \ Q(b) = 0.$$

Potem je $\exists y\, Q(y) \sim 0$, poleg tega pa je $\exists x\,\neg P(x) \sim 1$ in $\forall x\,\neg P(x) \sim 0$. Zato je $B \sim 1$ in $C \sim 0$. S to interpretacijo smo torej pokazali, da B in C nista enakovredni in da C ni splošno veljavna. Naj bo še $\mathcal{D} = \{a\}$ in

$$P(a) = 1, \ Q(a) = 0.$$

V tej interpretaciji je $B \sim 0$, zato tudi B ni splošno veljavna.

Rešitev naloge 45.

Najprej preoblikujmo formulo W:

$$\begin{aligned}
W &\sim \forall y\,(\neg\forall x P(x) \vee \exists z R(z,y)) \\
&\sim \forall y\,(\exists x \neg P(x) \vee \exists z R(z,y)) \\
&\sim \forall y\,(\exists x \neg P(x) \vee \exists x R(x,y)) \\
&\sim \forall y \exists x\,(\neg P(x) \vee R(x,y)) \\
&\sim \forall y \exists x\,(P(x) \Rightarrow R(x,y)) \\
&\sim U.
\end{aligned}$$

Formuli U in W sta torej enakovredni. Dokažimo še, da U in V nista enakovredni. Za področje pogovora izberimo $\mathcal{D} = \{a,b\}$ in naj bo $P(a) = 0$, $P(b) = 1$ ter $R \equiv 0$. Formulo V lahko zapišemo kot

$$V \sim \forall y(\forall x \neg P(x) \vee \exists x R(x,y)).$$

Ker je $P(b) = 1$, je $\forall x \neg P(x) \sim 0$. Ker je $R \equiv 0$, je $\exists x R(x,y) \sim 0$. Torej ima formula V v tej interpretaciji vrednost 0 pri vseh izbirah spremenljivk x in y. Za formulo U pa pri $y = a$ izberemo $x = a$ in dobimo $P(a) \Rightarrow R(a,a) \sim 0 \Rightarrow 0 \sim 1$, ter pri $y = b$ izberemo $x = a$ in spet dobimo $P(a) \Rightarrow R(a,b) \sim 0 \Rightarrow 0 \sim 1$. Formula U je torej v tej interpretaciji logično veljavna. Sledi, da U in V nista enakovredni.

Rešitev naloge 46.

a. Formulo B preoblikujemo v formulo A:

$$\begin{aligned}
B &\sim \exists x \forall y \forall z\,(Q(z) \Rightarrow P(x,y)) \\
&\sim \exists x \forall y \forall z\,(\neg Q(z) \vee P(x,y)) \\
&\sim \exists x \forall y\,(\forall z \neg Q(z) \vee P(x,y)) \\
&\sim \exists x\,(\forall z \neg Q(z) \vee \forall y P(x,y)) \\
&\sim (\forall z \neg Q(z) \vee \exists x \forall y P(x,y)) \\
&\sim \forall z\,(\neg Q(z) \vee \exists x \forall y P(x,y)) \\
&\sim \forall z \exists x\,(\neg Q(z) \vee \forall y P(x,y)) \\
&\sim \forall z \exists x \forall y\,(\neg Q(z) \vee P(x,y)) \\
&\sim \forall z \exists x \forall y\,(Q(z) \Rightarrow P(x,y)) \\
&\sim A.
\end{aligned}$$

b. Upoštevamo, da je $1 \Rightarrow F \sim F$ in izberemo predikat Q tako, da bo $Q \equiv 1$. Naj bo, na primer,

$$Q(z) = z \text{ je naravno število.}$$

Potem se formuli A in C poenostavita v

$$\begin{aligned}
A &\sim \exists x \forall y P(x,y), \\
C &\sim \forall y \exists x P(x,y).
\end{aligned}$$

Naj bo

$$P(x,y) = \text{število } x \text{ je naslednik števila } y.$$

Poglejmo, kaj pravita formuli A in C v tej interpretaciji.

A = Obstaja naravno število x, ki je naslednik vseh naravnih števil y.

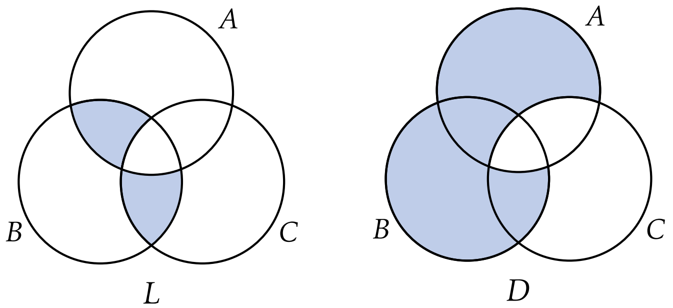
C = Za vsako naravno število y lahko najdemo naravno število x, ki je naslednik števila y.

Vidimo, da je $A \sim 0$ in $C \sim 1$, ker ne moremo najti enega x, ki bi bil naslednik vsem naravnim številom, lahko pa za vsako naravno število y najdemo kakšen x, ki bo dober, recimo kar $x = y + 1$. V tej interpretaciji torej formuli A in C nimata iste logične vrednosti in s tem smo pokazali, da nista enakovredni.

3. Množice

Rešitev naloge 47.

Označimo $L = (A + C) \cap B$ ter $D = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$. Če narišemo Vennova diagrama obeh množic, vidimo, da sliki nista enaki. Kot izgleda, pa velja $L \subseteq D$.



Ker Vennova diagrama nista enaka, tudi množici (najbrž) nista enaki. Poiščimo primer množic A, B in C, da bo $L \neq D$. Pomagamo si lahko z narisanima Vennovima diagramoma. Vidimo npr., da del množice B, ki je senčen na desni sliki, ni senčen na levi. Če izberemo kar $A = \emptyset$, $B = \{1\}$ in $C = \emptyset$, dobimo $L = \emptyset$ in $D = \{1\}$, t.j. $L \neq D$.

Zapišimo sedaj množici L in D kot uniji presekov množic A, B in C oziroma njihovih komplementov:

$$\begin{aligned} L &= (A + C) \cap B = (A \cap C^c \cup A^c \cap C) \cap B = A \cap B \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C, \\ D &= (A \cup B) \setminus (A \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) \\ &= A \cap A^c \cup A \cap C^c \cup A^c \cap B \cup B \cap C^c = A \cap C^c \cup A^c \cap B \cup B \cap C^c. \end{aligned}$$

Ker za poljubni množici X in Y velja $X \cap Y \subseteq X$ ter $X \subseteq X \cup Y$, je iz tu že jasno $L \subseteq D$. Velja namreč

$$L = A \cap B \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C \subseteq A \cap C^c \cup A^c \cap B \subseteq A \cap C^c \cup A^c \cap B \cup B \cap C^c = D.$$

Za malce bolj direktno utemeljitev zapišemo preseke v izrazu za D tako

$$\begin{aligned} A \cap C^c &= (A \cap C^c) \cap (B \cup B^c) = A \cap B \cap C^c \cup A \cap B^c \cap C^c, \\ A^c \cap B &= (A^c \cap B) \cap (C \cup C^c) = A^c \cap B \cap C \cup A^c \cap B \cap C^c, \\ B \cap C^c &= (B \cap C^c) \cap (A \cup A^c) = A \cap B \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C^c. \end{aligned}$$

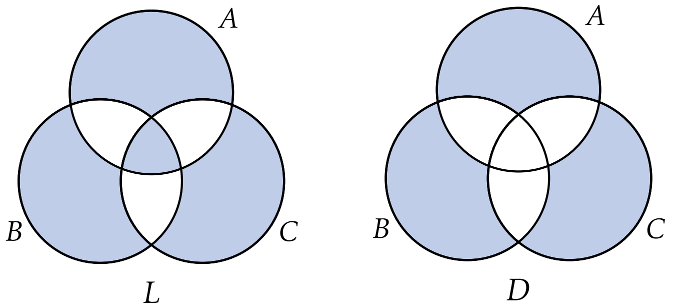
Dobimo

$$D = A \cap C^c \cup A^c \cap B \cup B \cap C^c = A \cap B \cap C^c \cup A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C \cup A^c \cap B \cap C^c,$$

kjer smo že upoštevali idempotentnost unije (t.j. $X \cup X = X$). Jasno je, da sta dva preseka v tem zapisu ravno tista, ki jih že imamo v L, t.j. $D = L \cup N$ (za 'neko' množico N), kar (spet) pomeni $L \subseteq D$.

Rešitev naloge 48.

Označimo $L = A + B + C$ in $D = (A + B) \cap C^c \cup (A + C) \cap B^c \cup (B + C) \cap A^c$ ter narišimo Vennova diagrama obeh množic.



Na podlagi Vennovih diagramov zgleda, da množici nista enaki ($L \neq D$), poleg tega pa se zdi, da velja $L = D$ v primeru $A \cap B \cap C = \emptyset$, saj je edina razlika med Vennovima diagramoma ravno del, ki predstavlja $A \cap B \cap C$.

Začnimo najprej s splošnim primerom. Če vzamemo $A = B = C = \{1\}$, potem je $L = A + B + C = \{1\}$ in $D = \emptyset$, torej množici L in D v splošnem nista enaki.

Natančno si oglejmo še primer $A \cap B \cap C = \emptyset$. Zapišimo množici L in D kot unijo presekov množic A, B in C oziroma njihovih komplementov. Začnimo z

$$\begin{aligned} D &= (A \cap B^c \cup B \cap A^c) \cap C^c \cup (A \cap C^c \cup C \cap A^c) \cap B^c \cup (B \cap C^c \cup C \cap B^c) \cap A^c \\ &= A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C^c \cup A^c \ \cap B^c \cap C, \end{aligned}$$

kjer smo preseke, ki se sicer pojavijo večkrat, že zapisali le enkrat. Še

$$\begin{aligned} L &= A + B + C = A + (B + C) = A + (B \cap C^c \cup C \cap B^c) \\ &= A \cap (B \cap C^c \cup C \cap B^c)^c \cup (B \cap C^c \cup C \cap B^c) \cap A^c. \end{aligned}$$

Posebej poglejmo

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C^c \cup C \cap B^c)^c &= A \cap ((B^c \cup C) \cap (C^c \cup B)) = A \cap (B^c \cap C^c \cup B \cap C) \\ &= A \cap B^c \cap C^c, \end{aligned}$$

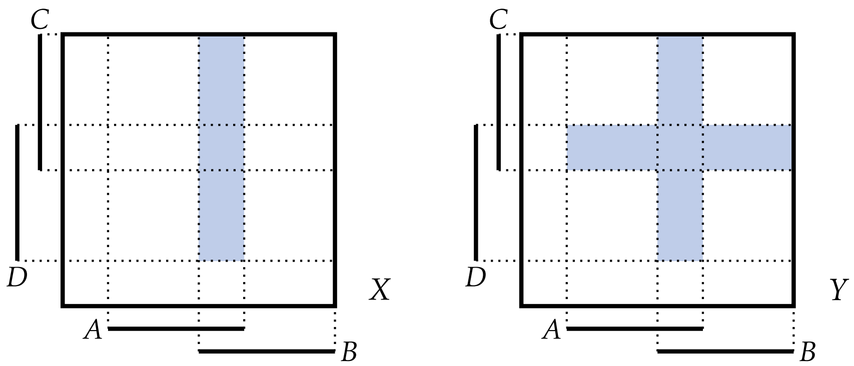
saj $A \cap B \cap C = \emptyset$. Torej

$$L = A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C^c \cup A^c \ \cap B^c \cap C,$$

kar je res enako kot D.

Rešitev naloge 49.

Označimo $X = (A \cap B) \times (C \cup D)$ in $Y = ((A \times C) \cup (B \times D)) \cap ((A \times D) \cup (B \times C))$. Oba kartezična produkta lahko predstavimo s spodnjima skicama.



Vsebovanost $X \subseteq Y$ preverimo po elementih. Vzemimo urejen par $(u, v) \in X$, t.j. $u \in A \cap B$ in $v \in C \cup D$. To pomeni, da velja

$$u \in A \wedge u \in B \wedge (v \in C \vee v \in D).$$

Iz tega pa logično sledi

$$(u \in A \wedge v \in C) \vee (u \in B \wedge v \in D) \text{ ter } (u \in A \wedge v \in D) \vee (u \in B \wedge v \in C),$$

kar pomeni

$$(u,v) \in (A \times C) \cup (B \times D) \text{ in } (u,v) \in (A \times D) \cup (B \times C).$$

To pa ravno pomeni, da je (u,v) element preseka teh kartezičnih produktov, t.j. $(u,v) \in Y$ in zato $X \subseteq Y$.

V splošnem $X \neq Y$. Pomagajmo si kar z zgornjo skico. Vzemimo $A = \{1\}$, $B = \varnothing$ in $C = D = \{a\}$. Tedaj je $X = \varnothing$ in $Y = \{(1,a)\}$.

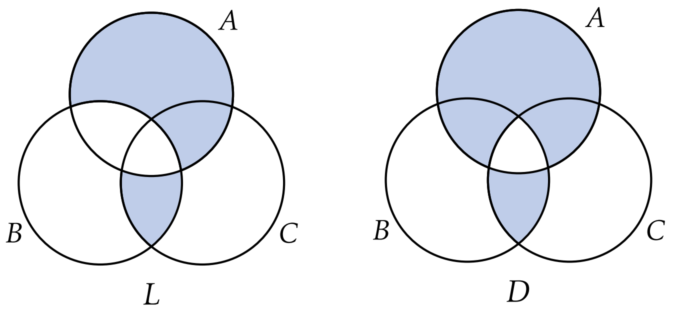
Pogoj $A + B = \varnothing$ pomeni $A = B$. V tem primeru lahko zapišemo

$$\begin{aligned} X &= A \times (C \cup D), \\ Y &= ((A \times C) \cup (A \times D)) \cap ((A \times D) \cup (A \times C)) = (A \times (C \cup D)) \cap (A \times (C \cup D)) \\ &= A \times (C \cup D), \end{aligned}$$

kar sta jasno enaki množici.

Rešitev naloge 50.

Narišimo Vennova diagrama množic L in D.



a. Glede na Vennova diagrama kaže, da množici L in D nista enaki. Da to natančno utemeljimo, lahko vzamemo kar $A = B = \{1\}$ ter $C = \varnothing$. Tedaj je $L = \varnothing$ in $D = \{1\}$, torej $L \neq D$.
b. Na podlagi Vennovih diagramov lahko sumimo, da velja $L \subseteq D$. Zapišimo L in D kot unijo presekov množic A, B in C oziroma njihovih komplementov. Imamo

$$\begin{aligned} L &= A \cap B^c \cup A^c \cap B \cap C \\ \text{ter } D &= A \cap (B \cap C)^c \cup B \cap C \cap A^c = A \cap (B^c \cup C^c) \cup B \cap C \cap A^c \\ &= A \cap B^c \cup A \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C. \end{aligned}$$

Od tod je jasno, da res velja $L \subseteq D$.
c. Pogoj $A \cap B \subseteq C$ lahko zapišemo kot $A \cap B \cap C^c = \varnothing$. Razširimo zapis L in D, da bo res izražen s preseki vseh treh množic (oziroma njihovih komplementov). Dobimo

$$\begin{aligned} L &= A \cap B^c \cap (C \cup C^c) \cup A^c \cap B \cap C \\ &= A \cap B^c \cap C \cup A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C \\ \text{ter } D &= A \cap B^c \cap (C \cup C^c) \cup A \cap C^c \cap (B \cup B^c) \cup A^c \cap B \cap C \\ &= A \cap B^c \cap C \cup A \cap B^c \cap C^c \cup A \cap B \cap C^c \cup A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C \\ &= A \cap B^c \cap C \cup A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C, \end{aligned}$$

kjer smo v zadnji vrstici upoštevali pogoj $A \cap B \cap C^c = \varnothing$ ter idempotentnost unije. Pri dodatnem pogoju torej velja $L = D$.

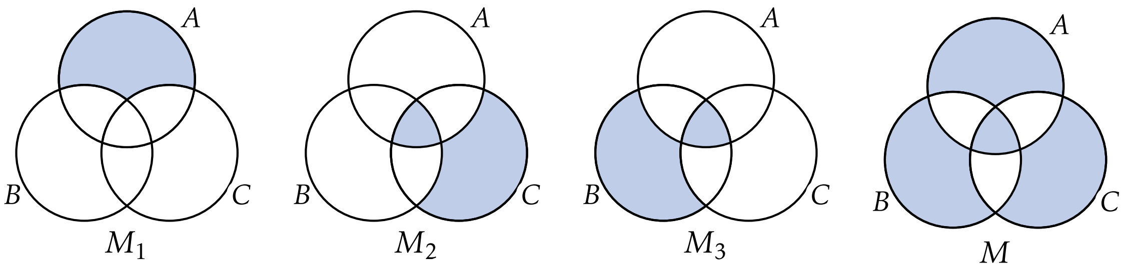
Enakost $L = D$ pri pogoju $A \cap B \cap C^c = \varnothing$ bi lahko udemeljili tudi nekoliko drugače. Če člen $A \cap C^c$ iz zapisa za D zapišemo kot

$$A \cap C^c \cap (B \cup B^c) = A \cap B \cap C^c \cup A \cap B^c \cap C^c = A \cap B^c \cap C^c$$

in upoštevamo $A \cap B^c \cap C^c \subseteq A \cap B^c$, potem spet ugotovimo, da velja $L = D$.

Rešitev naloge 51.

Narišimo Vennove diagrame množic M_1, M_2, M_3 in $M = A + B + C$.



a. Zapišimo množice M_1, M_2 in M_3 kot unije presekov množic A, B in C oziroma njihovih komplementov:

$$\begin{aligned}
M_1 &= A \cap (B \cup C)^c = A \cap B^c \cap C^c, \\
M_2 &= (A \cap B \cup A^c \cap B^c) \cap C = A \cap B \cap C \cup A^c \cap B^c \cap C, \\
M_3 &= (A \cap C \cup A^c \cap C^c) \cap B = A \cap B \cap C \cup A^c \cap B \cap C^c,
\end{aligned}$$

Od tod je jasno, da velja $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, $M_1 \cap M_3 = \varnothing$ ter $M_2 \cap M_3 = A \cap B \cap C$. Množice M_1, M_2 in M_3 bodo torej paroma disjunktne pri pogoju $A \cap B \cap C = \varnothing$.

b. Iz zgoraj izpeljanega vidimo

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 = A \cap B \cap C \cup A^c \cap B^c \cap C \cup A^c \cap B \cap C^c \cup A \cap B^c \cap C^c.$$

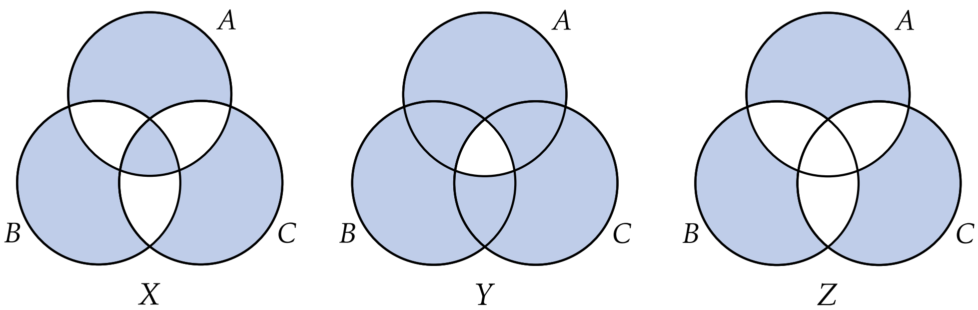
Poleg tega velja

$$\begin{aligned}
A + B + C &= A \cap (B + C)^c \cup (B + C) \cap A^c \\
&= A \cap (B \cap C^c \cup C \cap B^c)^c \cup (B \cap C^c \cup C \cap B^c) \cap A^c \\
&= A \cap ((B^c \cup C) \cap (C^c \cup B)) \cup A^c \cap B \cap C^c \cup A^c \cap B^c \cap C \\
&= A \cap (B \cap C \cup B^c \cap C^c) \cup A^c \cap B \cap C^c \cup A^c \cap B^c \cap C \\
&= A \cap B \cap C \cup A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C^c \cup A^c \cap B^c \cap C,
\end{aligned}$$

kar je enako tistemu, kar smo dobili za $M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

Rešitev naloge 52.

a. Vennovi diagrami množic X, Y in Z so na spodnji sliki.



Množica W je vedno prazna. Iz zapisa

$$W = (A \cup B) \cap C^c \cap (B \cup C) \cap A^c \cap (C \cup A) \cap B^c$$

je namreč hitro jasno, da dobimo le unijo presekov oblike $T \cap T^c = \emptyset$.

b. Glede na Vennove diagrame kaže, da X v splošnem ni enaka nobeni od množic Y, Z ali W. Že en sam protiprimer bo dovolj. Vzemimo kar $A = B = C = \{1\}$. V tem primeru je $X = \{1\}$, vendar $Y = Z = W = \emptyset$.

c. Glede na Vennove diagrame spet kaže, da nobeni dve izmed množic Y, Z in W nista enaki. Spet bo dovolj en sam (primerno izbran) protiprimer. Vzemimo $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$ in $C = \emptyset$. Tedaj je $Y = \{1,2\}$, $Z = \{2\}$ in $W = \emptyset$. Nobeni dve od teh množic torej nista enaki.

Rešitev naloge 53.

Iz $A \cup B \subseteq X \cap A$ dobimo

$$A \subseteq X,\ A \subseteq A,\ B \subseteq X,\ B \subseteq A.$$

Iz $X \cup A \subseteq X \cap B$ pa dobimo

$$X \subseteq X,\ A \subseteq X,\ X \subseteq B,\ A \subseteq B.$$

Trivialne vsebovanosti lahko seveda ignoriramo. Iz $B \subseteq A$ in $A \subseteq B$ sledi $A = B$. Nato pa opazimo še $B \subseteq X \subseteq B$ oziroma $A \subseteq X \subseteq A$ (saj $A = B$), kar pomeni $X = A$. To je, izgleda, že tisto kar iščemo:

- $A = B$ je pogoj za rešljivost,
- $X = A$ je rešitev (pri izpolnjenem pogoju).

Preverimo naše ugotovitve, tako da v originalen sistem vstavimo pogoj in rešitev:

$$A \cup A \subseteq A \cap A,$$
$$A \cup A \subseteq A \cap A,$$

kar jasno drži.

Rešitev naloge 54.

a. Zapišimo naš sistem s temi množicami A, B in C:

$$\{1,2\} \cup X = \{1,2,3,4\} \cap X,$$
$$\{1,2,3,4\} \cap X = \{1,2,3\} \cup X.$$

Iz tega zapisa bomo lahko hitro razbrali, kaj so rešitve. Prva enakost velja za $X = \{1,2\}$, $X = \{1,2,3\}$ in $X = \{1,2,3,4\}$. Druga enakost pa velja $X = \{1,2,3\}$ in $X = \{1,2,3,4\}$. Obe enakosti torej veljata za

$$X = \{1,2,3\} \text{ in } X = \{1,2,3,4\}.$$

b. Iz obeh enakosti, ki jih gledamo kot obojestranski vsebovanosti, dobimo vsebovanosti

$$A \subseteq B,\ A \subseteq X,\ X \subseteq B$$

ter

$$A \cup C \subseteq B,\ A \cup C \subseteq X,\ X \subseteq B.$$

(Pri tem smo trivialne vsebovanosti oblike $T \subseteq T$ kar izpustili.) Prva vrstica teh vsebovanosti je pravzaprav že zajeta v drugi vrstici vsebovanosti.

Kot kaže, je

- $A \cup C \subseteq B$ pogoj za rešljivost,
- rešitve so vse množice X, za katere velja $A \cup C \subseteq X \subseteq B$.

'Vstavimo' pogoj in rešitev X v naš sistem:

$$\begin{aligned} A \cup X = B \cap X &\quad \text{kar pomeni} \quad X = X, \\ B \cap X = A \cup C \cup X &\quad \text{kar pomeni} \quad X = X. \end{aligned}$$

Obe enačbi sta torej res izpolnjeni.

Rešitev naloge 55.

Prepišimo sistem tako:

$$\begin{aligned} C \cup X &= A \cap X, \\ B \cap X &= C \cap A^c. \end{aligned}$$

Iz prve enakosti sledi

$$C \subseteq A, \;\; C \subseteq X, X \subseteq A.$$

Če $C \subseteq A$, kar je enakovredno $C \cap A^c = \emptyset$, upoštevamo pri drugi enakosti, ta postane $B \cap X = \emptyset$, kar je enakovredno $X \subseteq B^c$. Rešitve X in pogoje za rešljivost lahko sedaj strnemo v

$$C \subseteq X \subseteq A \cap B^c \;\; \text{oziroma} \;\; C \subseteq X \subseteq A \setminus B.$$

(Pogoj za rešljivost je torej $C \subseteq A \setminus B$, rešitve pa so vse množice X, ki vsebujejo C in so podmnožice $A \setminus B$.)

Naredimo preizkus. Če pogoje in kandidate za rešitev vstavimo v originalen sistem, dobimo

$$\begin{aligned} X \cup C = A \cap X &\quad \text{kar pomeni} \quad X = X, \\ B \cap X = C \setminus A &\quad \text{kar pomeni} \quad \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 56.

Začnimo s prvo enakostjo, na obeh straneh 'dodamo' simetrično razliko z množico A

$$(A + (X \cap B)) + A = (A + B) + A \quad \text{kar pomeni} \quad X \cap B = B.$$

Iz te enakosti takoj sledi $B \subseteq X$. Iz druge enakosti pa lahko zaključimo še

$$X \subseteq A, B \subseteq A.$$

Pogoj za rešljivost je torej $B \subseteq A$, rešitve pa so vse množice X, za katere velja $B \subseteq X \subseteq A$. Še preverimo

$$\begin{aligned} A + (X \cap B) = A + B &\quad \text{kar pomeni} \quad A + B = A + B, \\ X \cup A \cup B = A &\quad \text{kar pomeni} \quad A = A. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 57.

Najprej prepišemo drugo enakost v

$$X \cup C = C \cap B^c.$$

Od tod zaključimo $X \subseteq C \cap B^c$ in $C \subseteq B^c$. Zadnja vsebovanost pomeni $C \cap B^c = C$ in $X \subseteq C \cap B^c$ lahko poenostavimo v $X \subseteq C$ oziroma $X = X \cap C$. Če to upoštevamo pri prvi enakosti sistema, dobimo

$$A \cap X = A \cap C \quad \text{kar pomeni} \quad A \cap X \cap C = A \cap C \quad \text{kar pomeni} \quad X \cap (A \cap C) = A \cap C,$$

kar pomeni $A \cap C \subseteq X$.

Strnimo naše ugotovitve:

- pogoj za rešljivost je $C \subseteq B^c$ (kar je enakovredno $B \cap C = \emptyset$),

- rešitev je vsaka množica X, za katero velja $A \cap C \subseteq X \subseteq C$.

(Hitro lahko preverimo, da vsaka taka množica X ustreza originalnemu sistemu.)

Rešitev naloge 58.

Iz prve enakosti ugotovimo
$$A \subseteq X,\ C \subseteq A,\ C \subseteq X.$$
Iz $A \subseteq X$ sledi $A \setminus X = \emptyset$ in druga enakost postane
$$B \cap C \cup (X \setminus A) = \emptyset.$$
To pa pomeni $B \cap C = \emptyset$ in $X \setminus A = \emptyset$ oziroma $X \subseteq A$.

Strnimo ugotovitve:

- pogoja za rešljivost sta $C \subseteq A$ in $B \cap C = \emptyset$,
- rešitev je $X = A$.

Rešitev naloge 59.

Prepišimo sistem tako, da vse razlike množic zamenjamo s preseki z ustreznimi komplementi. Dobimo
$$\begin{aligned} A \cup X &= B \cap X^c, \\ X \cup C &= B \cap X, \\ A \cap X &= C \cap X^c. \end{aligned}$$
Iz prve enakosti sledi
$$A \subseteq B,\ \ A \subseteq X^c,\ X \subseteq B,\ X \subseteq X^c.$$
Zadnji pogoj pomeni $X = \emptyset$. Imamo torej že edinega kandidata za rešitev, določiti pa moramo še pogoje za rešljivost. Najlažje bo, če v zgornje tri enakosti kar vstavimo $X = \emptyset$:
$$\begin{aligned} A &= B, \\ C &= \emptyset, \\ \emptyset &= C. \end{aligned}$$
Zaključimo:

- pogoja za rešljivost sta $A = B$ in $C = \emptyset$,
- rešitev je $X = \emptyset$.

Rešitev naloge 60.

Iz prve enakosti sledijo vsebovanosti
$$A \subseteq B,\ A \subseteq C,\ X \subseteq B,\ X \subseteq C.$$
Iz druge enakosti pa sledijo vsebovanosti
$$B \subseteq A,\ B \subseteq C,\ \ X \subseteq A,\ X \subseteq C.$$
Od tod zaključimo:

- $A = B$ in $A \subseteq C$ sta pogoja za rešljivost,
- rešitve so vse množice X, za katere velja $X \subseteq A$. (Iz pogojev sledi $A \cap B \cap C = A$.)

Naredimo še 'preizkus':
$$\begin{aligned} B \cap C &= A \cup X \quad \text{kar pomeni} \quad A = A, \\ B \cup X &= A \cap C \quad \text{kar pomeni} \quad A = A. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 61.

Netrivialna vsebovanost, ki sledi iz enakosti $(C\cup A)\cap B = (C\cap B)\cup A$, je le $A \subseteq B$. V tem primeru lahko levo stran te enakosti zapišemo kot

$$(C\cup A)\cap B = C\cap B \cup A\cap B = C\cap B \cup A,$$

kar je seveda enako desni strani naše enakosti. Enakost torej velja pri pogoju $A\subseteq B$.

Rešimo sedaj sistem

$$\begin{aligned}(X\cup A)\cap B &= (X\cap B)\cup A,\\ A\cup X &= B\cap X,\end{aligned}$$

Pogoj za izpolnjenost prve enakosti že poznamo, ta je $A\subseteq B$. Iz druge enakosti pa sledi

$$A\subseteq B,\ A\subseteq X,\ X\subseteq B.$$

Strnimo:

- pogoj za rešljivost je $A\subseteq B$,
- rešitve so vse množice X, za katere velja $A\subseteq X\subseteq B$.

Rešitev naloge 62.

a. Za disjunktni množici A in B velja $A+B = A\cup B$ in sistem lahko prepišemo v

$$\begin{aligned}A\cup B &= X\cap C,\\ A\cup X &= A\cap C^c.\end{aligned}$$

Iz prve enakosti dobimo

$$A\subseteq X,\ \ A\subseteq C,\ B\subseteq X,\ B\subseteq C.$$

Iz druge enakosti pa dobimo

$$A\subseteq C^c,\ X\subseteq A,\ X\subseteq C^c.$$

Pogoja $A\subseteq C$ in $A\subseteq C^c$ pomenita $A\subseteq C\cap C^c = \emptyset$, torej $A=\emptyset$. Iz $X\subseteq A$ sledi še $X=\emptyset$ in iz $B\subseteq X$ še $B=\emptyset$.

Ugotovili smo:

- pogoja za rešljivost sta $A=\emptyset$ in $B=\emptyset$,
- rešitev je $X=\emptyset$.

b. Naš sistem je sedaj

$$\begin{aligned}A+B &= X\cap C,\\ A\cup X &= A\cap C^c.\end{aligned}$$

Iz druge enakosti (tako kot prej) dobimo

$$A\subseteq C^c,\ X\subseteq A,\ X\subseteq C^c.$$

Zadnja vsebovanost pomeni $X\cap C=\emptyset$ in, ko to upoštevamo pri prvi enakosti, dobimo

$$A+B=\emptyset,$$

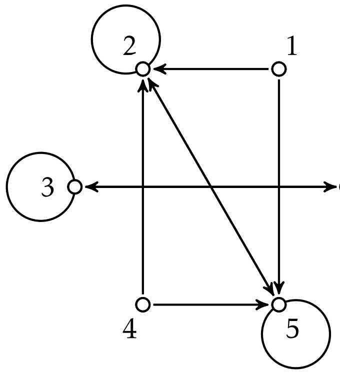
kar pomeni $A=B$. Upoštevamo še, da lahko $A\subseteq C^c$ zapišemo kot $A\cap C=\emptyset$, in zaključimo

- pogoja za rešljivost sta $A=B$ in $A\cap C=\emptyset$,
- rešitve so vse množice X, za katere velja $X\subseteq A$.

4. Relacije

Rešitev naloge 63.

a. Z $x = 1$ so v relaciji vsa števila y, za katera 3 deli $1+y$, torej dobimo povezavi $(1,2)$ in $(1,5)$. Z $x = 2$ so v relaciji vsa števila y, za katera 3 deli $4+y \equiv 1+y$, torej dobimo povezavi $(2,2)$ in $(2,5)$. Z $x = 3$ so v relaciji vsi y, za katere 3 deli $9+y \equiv y$, torej dobimo $(3,3)$ in $(3,6)$. Z $x = 4$ so v relaciji vsi y, za katere 3 deli $16+y \equiv 1+y$, torej dobimo $(4,2)$ in $(4,5)$. Z $x = 5$ so v relaciji vsi y, za katere 3 deli $25+y \equiv 1+y$, torej dobimo $(5,2)$ in $(5,5)$. Z $x = 6$ so v relaciji vsi y, za katere 3 deli $36+y \equiv y$, torej dobimo $(6,3)$ in $(6,6)$. Graf relacije R^2 je kar enak grafu relacije R, saj lahko v dveh korakih pridemo v natanko iste točke kot z enim korakom.



$R = R^2$

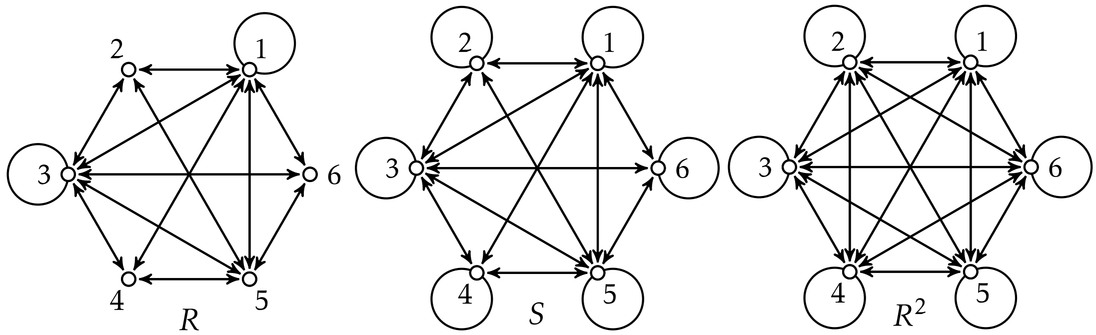
b. Relacija R ni simetrična, ker je na primer $1\,R\,2$, vendar pa ni $2\,R\,1$. Relacija je delna urejenost, če je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Relacija R ni refleksivna, ker na primer ni $1\,R\,1$, zato ni delna urejenost. Ker je $2\,R\,5$ in $5\,R\,2$, vendar ni $2 = 5$, relacija R ni antisimetrična in tudi od tod sledi, da ni delna urejenost. Je pa relacija R tranzitivna. Za to bi sicer zadoščalo že $R^2 \subseteq R$, v tem primeru pa celo velja enačaj.

c. Relacija je ekvivalenčna, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna. Relacija R torej ni ekvivalenčna, ker smo že zgoraj premislili, da ni refleksivna.

d. Če bi veljalo $1\,R^m\,1$, bi to pomenilo, da lahko v grafu relacije R v m korakih pridemo od 1 nazaj v 1. Ker v grafu R v točko 1 ne vodi nobena pot, tega ne moremo storiti, torej tak m ne obstaja. Nasprotno pa lahko pridemo iz 2 v 2 v poljubnem številu korakov, zato lahko za n izberemo katerokoli pozitivno naravno število.

Rešitev naloge 64.

a. Enačba $ax + by = 3$ ima celoštevilske rešitve natanko tedaj, ko $\gcd(a,b)$ deli 3. Števili 1 in 3 sta tako v relaciji z vsemi, število 5 je v relaciji z vsemi razen samo s seboj in soda števila so v relaciji samo z lihimi števili. Graf relacije S dobimo tako, da grafu relacije R dodamo vse zanke. Ker lahko v grafu relacije R v dveh korakih pridemo iz vsake točke v vsako drugo, je $R^2 = A \times A$ in graf R^2 vsebuje vse povezave in vse zanke.



b. Relacija R ni refleksivna, ker na primer ne velja $2\,R\,2$. Je simetrična, saj je $\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$ in zato

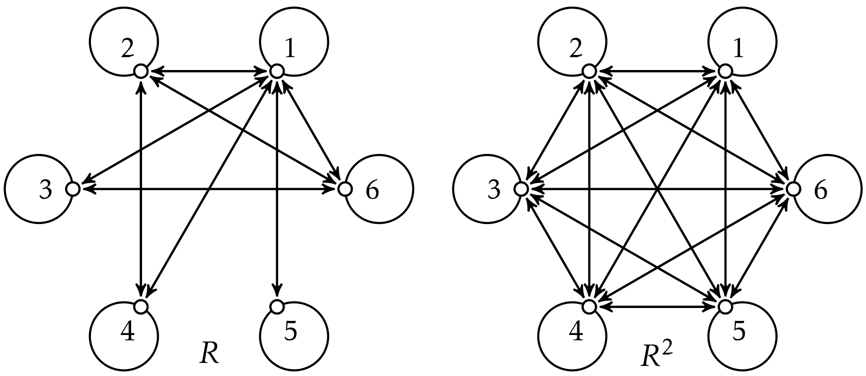
$$a\,R\,b \iff 3 \text{ deli } \gcd(a,b) \iff 3 \text{ deli } \gcd(b,a) \iff b\,R\,a.$$

Relacija R ni tranzitivna, ker je na primer $2\,R\,3$ in $3\,R\,4$, ni pa $2\,R\,4$. Relacija S je refleksivna, ker je očitno $\mathrm{id}_A \subseteq S$. Je tudi simetrična, ker je unija dveh simetričnih relacij, $S = R \cup \mathrm{id}_A$. Ni tranzitivna, ker je na primer $2\,S\,3$ in $3\,S\,4$, ni pa $2\,S\,4$.

c. Relaciji R in S nista ekvivalenčni, ker nobena od njiju ni refleksivna, simetrična in tranzitivna hkrati. Je pa ekvivalenčna relacija $R^2 = A \times A$.

Rešitev naloge 65.

a. Očitno je relacija R refleksivna in simetrična. Vsako število namreč deli samega sebe, poleg tega pa je predpis simetričen. Število 1 bo povezano z vsemi. Število 2 bo povezano z 1 in vsemi sodimi. Število 3 bo povezano z 1, 3 in 6. Število 4 bo povezano z 1, 2 in 4. Število 5 bo povezano z 1 in 5 in število 6 bo povezano z 1, 2, 3 in 6. Ker lahko v grafu relacije R pridemo od vsake točke do vsake druge v natanko dveh korakih tako, da gremo preko točke 1, je $R^2 = A \times A$.



b. Premislili smo že, da je relacija R refleksivna ($a\,R\,a$ za vse $a \in A$) in simetrična (če je $a\,R\,b$, potem je tudi $b\,R\,a$ za vse $a, b \in A$). Relacija R ni tranzitivna, ker je na primer $2\,R\,1$ in $1\,R\,3$, vendar ni $2\,R\,3$. Relacija R^2 je refleksivna, simetrična in tranzitivna, ker je enaka univerzalni relaciji $A \times A$.

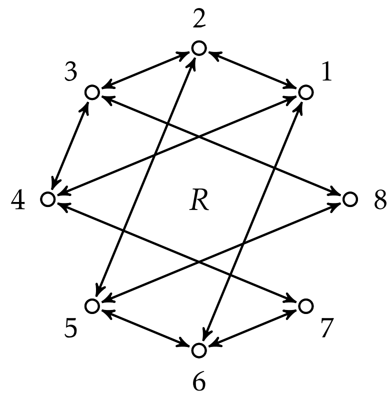
c. Relacija R^2 je ekvivalenčna, ekvivalenčni razred pa je en sam, in sicer množica A.

Rešitev naloge 66.

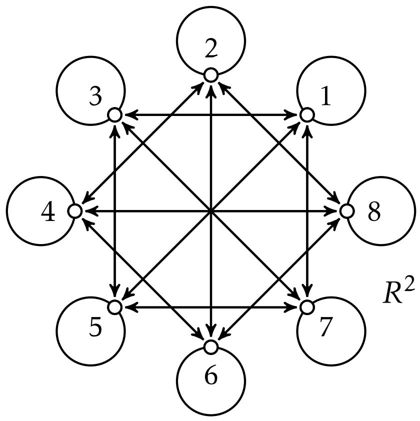
a. Relacija R ni refleksivna, ker je na primer $1 + 1 = 2$ ni liho praštevilo in zato ne velja $1\,R\,1$. Je simetrična. Ker je $a + b = b + a$, je namreč $a + b$ liho praštevilo natanko tedaj, ko je $b + a$ liho praštevilo, in zato je $a\,R\,b$ natanko tedaj, ko je $b\,R\,a$.

Ker je $1+2=3$ in $2+3=5$, je $1\,R\,2$ in $2\,R\,3$, ne velja pa $1\,R\,3$, ker $1+3=4$ ni liho praštevilo. Relacija R torej ni tranzitivna.

b. Razmislili smo že, da je relacija R simetrična, zato so vse povezave v obe smeri. Število 1 je v relaciji z 2, 4 in 6. Število 2 je v relaciji še s 3 in 5. Število 3 je v relaciji še s 4 in 8. Število 4 je v relaciji še s 7. Število 5 je v relaciji še s 6 in 8. Število 6 je v relaciji še s 7.



Relacija R^2 vsebuje vse zanke, ker lahko iz vsakega števila v grafu R pridemo nazaj v to število v točno dveh korakih. Prav tako lahko pridemo iz vsakega lihega števila v vsako drugo liho število v natanko dveh korakih in iz vsakega sodega števila v vsako drugo sodo število v natanko dveh korakih. Očitno pa ne moremo v dveh korakih priti iz lihega števila v sodo ali obratno, saj so v grafu R liha števila povezana samo z (nekaterimi) sodimi in soda samo z (nekaterimi) lihimi. Po dveh korakih bomo zato nujno končali v številu iste parnosti. V grafu R^2 so torej med sabo povezana vsa liha števila in vsa soda števila, med obema skupinama pa ni povezav.



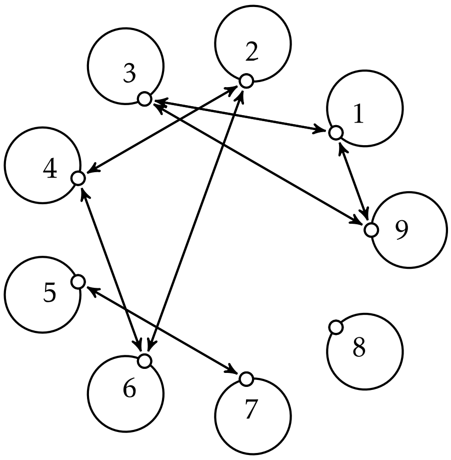
c. Relacija R^2 ima dva ekvivalenčna razreda, in sicer $\{1,3,5,7\}$ ter $\{2,4,6,8\}$.

Rešitev naloge 67.

a. Trojiške zapise števil od 1 do 9 zapišemo v tabelo

število	1	2	3	4	5	6	7	8	9
trojiški zapis	001	002	010	011	012	020	021	022	100
vsota števk	1	2	1	2	3	2	3	4	1

b. Takoj opazimo, da je relacija R simetrična in refleksivna. Števila 1, 3 in 9 imajo v trojiškem zapisu vsoto števk 1, zato bo vsako od njih v relaciji natanko z ostalima dvema. Podobno bodo števila 2, 4 in 6 v relaciji le druga z drugim, saj imajo edina vsoto števk enako 2. V relaciji bosta tudi števili 5 in 7, medtem ko bo število 8 v relaciji le samo s seboj.



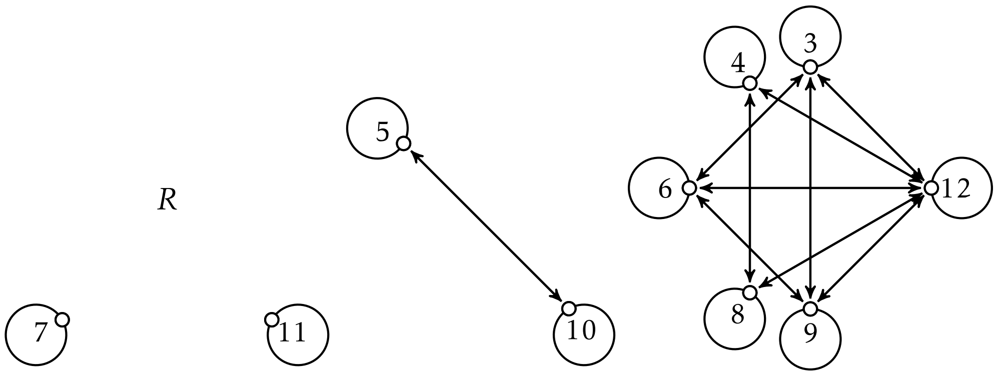
c. Relacija R je očitno refleksivna (vsako število a ima v trojiškem zapisu enako vsoto števk kot a), simetrična (če ima a enako vsoto števk kot b, ima tudi b enako vsoto števk kot a) in tranzitivna (če ima a enako vsoto števk kot b in b enako vsoto števk kot c, potem imata tudi a in c enako vsoto števk). Zato je R ekvivalenčna relacija. Ekvivalenčni razredi so $\{1,3,9\}$, $\{2,4,6\}$, $\{5,7\}$ in $\{8\}$.
d. Relacija je delna urejenost, če je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Relacija R ni antisimetrična (ker je na primer $1\,R\,3$ in $3\,R\,1$, ni pa $1 = 3$), zato ni delna urejenost.

Rešitev naloge 68.

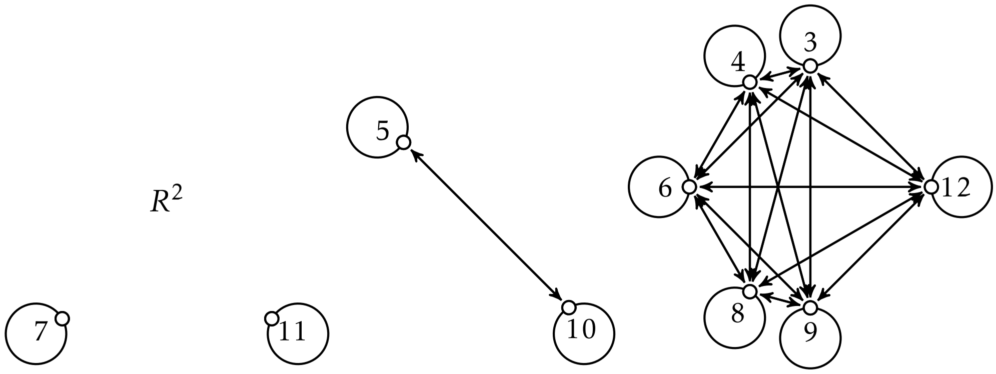
a. Ker je $\gcd(a,a) = a > 2$ za vse $a \in A$, bo relacija R refleksivna. Ker je $\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$, bo tudi simetrična. Izračunajmo $\gcd(a,b)$ za $a,b \in A$ in poglejmo, kdaj je rezultat večji od 2.

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3			3			3			3
4		4				4				4
5			5					5		
6	3			6			3			6
7					7					
8		4				8				4
9	3			3			9			3
10			5					10		
11									11	
12	3	4		6		4	3			12

V relaciji R so poleg id_A še pari $(3,6)$, $(3,9)$, $(3,12)$, $(4,8)$, $(4,12)$, $(5,10)$, $(6,3)$, $(6,9)$, $(6,12)$, $(8,4)$, $(8,12)$, $(9,3)$, $(9,6)$, $(9,12)$, $(10,5)$, $(12,3)$, $(12,4)$, $(12,6)$, $(12,8)$, $(12,9)$. Slika bo nekoliko bolj pregledna, če narišemo vsako komponento posebej.



Graf relacije R^2 bo imel iste komponente, le znotraj zadnje lahko v dveh korakih pridemo iz vsake točke v vsako drugo, zato bomo imeli med točkami te komponente vse možne povezave.



b. Premislili smo že, da je relacija R refleksivna in simetrična. Ni pa tranzitivna, ker je na primer $3\,R\,12$ in $12\,R\,4$, ni pa $3\,R\,4$. Relacija R^2 je seveda simetrična, ker je simetrična relacija R. Prav tako je refleksivna, ker iz $\mathrm{id}_A \subseteq R$ sledi $\mathrm{id}_A \subseteq R^2$. Je tranzitivna, ker za poljubno pot dolžine 2 v grafu R^2 obstaja direktna povezava od začetne do končne točke. Torej je relacija R^2 ekvivalenčna. Ekvivalenčni razredi so $\{7\}$, $\{11\}$, $\{5, 10\}$ in $\{3, 4, 6, 8, 9, 12\}$.

Rešitev naloge 69. ⇧

a. Naj bo $(a, b) \in R$. Radi bi videli, da je potem tudi $(a, b) \in R^2$. Vemo torej, da je $d = \gcd(a, b) > 3$ in radi bi pokazali, da obstaja $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, da je $a\,R\,c$ in $c\,R\,b$. Poiskati moramo torej tak c, da bo $\gcd(a, c) > 3$ in $\gcd(c, b) > 3$. Očitno $c = d$ ustreza obema pogojema, ker je $\gcd(a, d) = \gcd(d, b) = d > 3$.
b. Ker je $\gcd(a, b) = \gcd(b, a)$, je relacija R simetrična. Relacija R ni refleksivna, ker na primer ne velja $1\,R\,1$, saj je $\gcd(1, 1) = 1 < 3$. Relacija R zato ni ekvivalenčna. Relacija R ni tranzitivna, ker je na primer $4\,R\,20$ in $20\,R\,5$, ne velja pa $4\,R\,5$.
c. Ker je R simetrična, je simetrična tudi relacija R^2. Število 1 ni v relaciji R z nobenim številom, zato tudi $1\,R^2\,1$ ne velja in relacija R^2 ni refleksivna. Sledi, da tudi R^2 ni ekvivalenčna. Je pa relacija R^2 tranzitivna. Števila 1, 2 in 3 nimajo namreč nobenih povezav, za poljubni števili $a, b > 3$ pa velja $a\,R^2\,b$. Res, ker za $a, b > 3$ velja $\gcd(a, ab) = a > 3$ in $\gcd(ab, b) = b > 3$, je $a\,R\,ab$ in $ab\,R\,b$ in torej $a\,R^2\,b$. Med števili, ki so večja od 3, torej obstajajo vse možne bližnjice,

Rešitev naloge 70. ⇧

a. Ker za vsako naravno število a velja, da a deli a^2, je $a\,R\,a$ in je relacija R refleksivna.

b. Očitno je $16\,R\,4$ in $4\,R\,2$, ker 16 deli 4^2 in 4 deli 2^2. Ker pa 16 ne deli 2^2, ne velja $16\,R\,2$. Relacija R torej ni tranzitivna.

c. Spomnimo se, da je $R^* = R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \ldots$. Denimo, da za nek $k \in \mathbb{N}$ velja, da a deli $b^{(2^k)}$. Če je $k = 0$, potem a deli b, zato a deli b^2 in je $a\,R\,b$, torej je tudi $a\,R^*\,b$. Če pa je $k > 0$, potem a deli $(b^{(2^{k-1})})^2$, torej je $a\,R\,b^{(2^{k-1})}$. Sledi, da je

$$a\,R\,b^{(2^{k-1})}\,R\,b^{(2^{k-2})}\,R\,b^{(2^{k-3})}\ldots b^{(2^2)}\,R\,b^{(2^1)}\,R\,b,$$

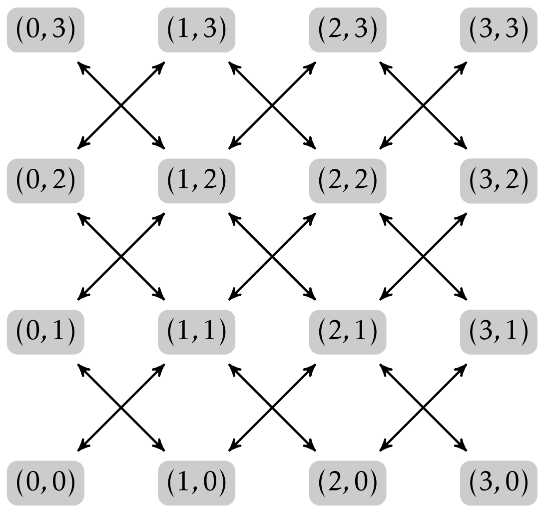
zato je spet $a\,R^+\,b$.

Rešitev naloge 71.

a. Iščemo pare (c,d), za katere bo $(c-10)(d-10) \in \{-1,1\}$. Ker sta $c-10$ in $d-10$ celi števili, bo produkt enak ± 1 natanko tedaj, ko bosta oba faktorja enaka ± 1. Torej je $c,d \in \{9,11\}$ in dobimo štiri rešitve,

$$(9,9),\ (9,11),\ (11,9),\ (11,11).$$

b. Oglejmo si del grafa relacije R.



Spomnimo se, da je $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$. Vidimo, da je $(a,b)\,R\,(a+1,b+1)\,R\,(a+b)$, zato je $(a,b)\,R^2\,(a,b)$ in torej $(a,b)\,R^+\,(a,b)$. Relacija R^+ je torej refleksivna. Ker je relacija R simetrična, so simetrične tudi vse potence R^k in zato tudi R^+. Seveda je R^+ kot tranzitivna ovojnica relacije R tudi tranzitivna.

c. Če pozorno pogledamo skico grafa relacije R, vidimo, da ima graf dve komponenti. Eno sestavljajo točke (x,y), pri katerih sta koordinati x in y iste parnosti, drugo pa točke, pri katerih sta koordinati različne parnosti. Če imamo na voljo poljubno število korakov, lahko pridemo od katerekoli točke do katerekoli druge točke iz iste komponente, ne moremo pa do točk v drugi komponenti. To pomeni da bodo v grafu R^+ med seboj povezane vse točke (x,y), za katere je $x-y$ sodo število, in pa vse točke, za katere je $x-y$ liho število, med obema komponentama pa ne bo nobene povezave. Relacija R^+ bo torej imela dva ekvivalenčna razreda:

$$[(0,0)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x-y \text{ je sodo število}\},$$
$$[(0,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x-y \text{ je liho število}\}.$$

Rešitev naloge 72.

a. Števili a in b sta v relaciji, če imata iste praštevilske delitelje. Ker je $6 = 2 \cdot 3$ in $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, imata števili 6 in 24 iste praštevilske delitelje (natančneje, natanko dva, namreč 2 in 3). Torej je $6\,R\,24$. Ker pa $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ ni deljivo s 3, ima število 24 praštevilski delitelj, ki ga 8 nima. Zato ne velja $8\,R\,24$.

b. Ker ima a seveda iste praštevilske delitelje kot a, je $a\,R\,a$ in je relacija R refleksivna. Če ima a iste praštevilske delitelje kot b, ima seveda tudi b iste praštevilske delitelje kot a, zato iz $a\,R\,b$ sledi, da je $b\,R\,a$. Relacija R je zato simetrična. Če ima a iste praštevilske delitelje kot b in b iste kot c, potem ima seveda tudi a iste praštevilske delitelje kot c, torej iz $a\,R\,b$ in $b\,R\,c$ sledi, da je $a\,R\,c$. Relacija R je tako tudi tranzitivna. Ker je refleksivna, simetrična in tranzitivna, je ekvivalenčna.

c. Edino praštevilo, ki deli 2 je 2, torej bodo v $[2]$ natanko tista števila, ki so deljiva le z 2 in z nobenim drugim praštevilom. Tako je

$$[2] = \{2^k\ k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}.$$

Podobno je $2018 = 2 \cdot 1009$, zato bodo v $[2018]$ števila, ki imajo natanko dva praštevilska delitelja, 2 in 1009. Torej je

$$[2] = \{2^k \cdot 1009^l\ k, l \in \mathbb{N}, k, l \neq 0\}.$$

d. Takoj ko bo predstavnik razreda deljiv z nekim praštevilom p, bodo v razredu vsaj še vsi p^k-kratniki predstavnika. Edino število, ki ni deljivo z nobenim praštevilom, je 1, torej je $[1] = \{1\}$ edini ekvivalenčni razred, ki ima en sam element. Vsi ostali ekvivalenčni razredi imajo neskončno elementov.

Rešitev naloge 73. ⇧

a. Ker je $1^2 \leq 2^2$, je $1\,R\,2$. Ker $(-2)^2 \neg \leq 1^2$, ne velja $-2\,R\,1$. Ker je $1^2 \leq (-3)^2$, je $1\,R\,-3$.

b. Ker je $a^2 \leq a^2$, je $a\,R\,a$ in je R refleksivna. Denimo, da je $a\,R\,b$ in $b\,R\,c$. Potem je $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, zato je $a^2 \leq c^2$ in je $a\,R\,c$. To pomeni, da je relacija R tudi tranzitivna.

c. Videli smo že, da je $1\,R\,2$, očitno pa ni $2\,R\,1$, ker ne velja $2^2 \leq 1^2$. Torej relacija R ni simetrična. Denimo, da velja $a\,R\,b$ in $b\,R\,a$. Potem je $a^2 \leq b^2$ in $b^2 \leq a^2$, od koder sledi $a^2 = b^2$. Seveda pa to ne pomeni, da je $a = b$. Na primer, $1\,R(-1)$ in $(-1)\,R\,1$, vendar pa $-1 \neq 1$. Relacija R torej ni antisimetrična.

Rešitev naloge 74. ⇧

a. Ker je za vse $x \in \mathbb{Z}$ $x^2 - x^2 = 0$ in 7 deli 0, je $x\,R\,x$ in je relacija R refleksivna. Če 7 deli $x^2 - y^2$, potem deli tudi $y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2)$, zato iz $x\,R\,y$ sledi, da je tudi $y\,R\,x$. Relacija R je zato simetrična. Če je $x\,R\,y$ in $y\,R\,z$, potem 7 deli $x^2 - y^2$ in $y^2 - z^2$. Seveda potem deli tudi vsoto

$$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x^2 - z^2,$$

zato je tudi $x\,R\,z$. Relacija R je tako tudi tranzitivna. Ker je refleksivna, simetrična in tranzitivna, je ekvivalenčna.

b. Velja

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\,R\,1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 \text{ deli } x^2 - 1\}.$$

V tej množici so natanko števila, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek ± 1. Torej je

$$[1] = \{\pm 1, \pm 6, \pm 8, \pm 13, \pm 15, \pm 20, \pm 22, \ldots\}.$$

c. Moč faktorske množice je enaka številu različnih ekvivalenčnih razredov. Razred $[1]$ smo že poiskali. Določimo še preostale ekvivalenčne razrede. Očitno je

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\,R\,0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 \text{ deli } x^2\},$$

torej so v $[0]$ natanko števila, ki so deljiva s 7:

$$[0] = \{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \ldots\}.$$

Ker je

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\,R\,2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 \text{ deli } x^2 - 4\},$$

torej so v $[0]$ natanko števila, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek ± 2:

$$[2] = \{\pm 2, \pm 5, \pm 9, \pm 12, \pm 16, \ldots\}.$$

Ker je

$$[3] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\,R\,3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 \text{ deli } x^2 - 9\},$$

torej so v $[0]$ natanko števila, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek ± 3:

$$[3] = \{\pm 3, \pm 4, \pm 10, \pm 11, \pm 17, \ldots\}.$$

Ker je $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$, so to vsi ekvivalenčni razredi in moč faktorske množice je zato enaka 4.

Rešitev naloge 75.

a. Če iz besede xyyzzzyyx odstranimo vse zaporedne ponovitve istega znaka, dobimo

$$(\mathsf{xyyzzzyyx})' = \mathsf{xyzyx}.$$

b. Ker je

$$(\mathsf{yxzzyxxy})' = \mathsf{yxzyxy} \neq \mathsf{yxyxz} = (\mathsf{yxxyyxzz})',$$

ne velja yxzzyxxy R yxxyyxzz. Prav tako je

$$(\mathsf{xzy})' = \mathsf{xzy} \neq \mathsf{zxy} = (\mathsf{zxxy})',$$

zato ne velja xzy R zxxy.

c. Ker za vsako besedo α velja $\alpha' = \alpha'$, je $\alpha\,R\,\alpha$ in relacija R je refleksivna. Če je $\alpha' = \beta'$, potem je seveda tudi $\beta' = \alpha'$, zato iz $\alpha\,R\,\beta$ sledi, da je tudi $\beta\,R\,\alpha$ in relacija R, je simetrična. Naj bo še $\alpha\,R\,\beta$ in $\beta\,R\,\gamma$. Potem je $\alpha' = \beta' = \gamma'$, zato je $\alpha' = \gamma'$ in je $\alpha\,R\,\gamma$. Relacija R je tako tudi tranzitivna.

d. Ker je R refleksivna, simetrična in tranzitivna, je ekvivalenčna. V [x] so vse besede, ki so sestavljene zgolj iz ponovitev črke x, torej je

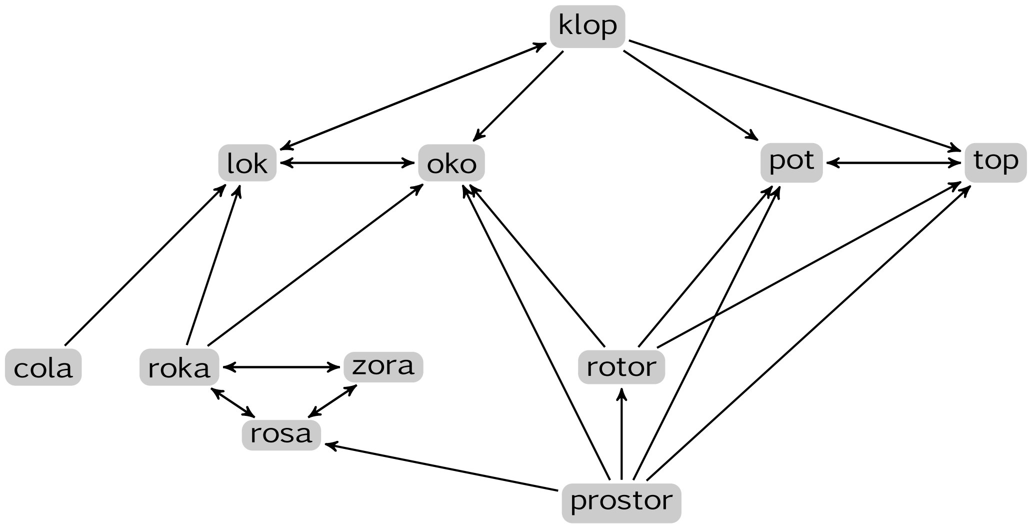
$$[\mathsf{x}] = \{\mathsf{x}, \mathsf{xx}, \mathsf{xxx}, \mathsf{xxxx}, \mathsf{xxxxx}, \ldots\}.$$

Rešitev naloge 76.

a. Če bi lahko za tvorjenje besede β uporabili samo znake iz α, bi veljalo $|\beta| \leq |\alpha|$. Ker lahko uporabimo še največ en dodatni znak, je lahko dolžina besede β še za 1 daljša. Seveda pa lahko poljubno število znakov tudi izpustimo, zato navzdol dolžina besede β ni omejena. Velja torej $|\beta| \leq |\alpha| + 1$.

b. Vsaka beseda je seveda v relaciji sama s seboj, ampak zank zaradi večje preglednosti ne bomo risali.
   - Iz črk besede prostor lahko sestavimo oko, pot, top, rosa, rotor.
   - Iz črk besede rotor lahko sestavimo oko, pot, top.
     Iz črk besede klop lahko sestavimo lok, oko, pot, top.
   - Iz črk besede roka lahko sestavimo rosa, zora, lok, oko.
   - Iz črk besede rosa lahko sestavimo roka, zora.
   - Iz črk besede cola lahko sestavimo lok.
   - Iz črk besede zora lahko sestavimo rosa, roka.
   - Iz črk besede lok lahko sestavimo oko, klop.
   - Iz črk besede oko lahko sestavimo lok.

- Iz črk besede pot lahko sestavimo top.
- Iz črk besede top lahko sestavimo pot.



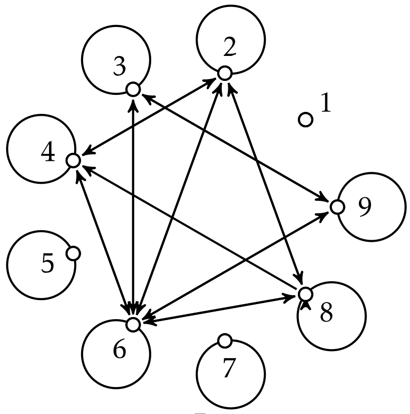
c. Besedi α in β bosta v relaciji $R \cap R^{-1}$, če bo veljalo $\alpha R \beta$ in $\alpha R^{-1} \beta$, torej če bo veljalo $\alpha R \beta$ in $\beta R \alpha$. Iz prve točke sledi, da bo $|\beta| \leq |\alpha|+1$ in $|\alpha| \leq |\beta|+1$. Od tod izpeljemo $|\beta|-1 \leq |\alpha| \leq |\beta|+1$. Torej sta besedi α in β istih dolžin ali pa je ena natanko eno črko krajša. Če sta istih dolžin, se lahko razlikujeta v največ enem znaku. Če je ena en znak krajša, potem mora druga vsebovati vse znake iz prve in natanko en dodatni znak. Če povzamemo, besedi α in β sta v relaciji $R \cap R^{-1}$ kadar
   - je α anagram β (npr. pot in top),
   - dobimo anagram besede β, če v α spremenimo natanko en znak (npr. lok in oko ali roka in rosa),
   - če α dodamo natanko en znak, dobimo anagram besede β (npr. lok in klop),
   - če β dodamo natanko en znak, dobimo anagram besede α.

Rešitev naloge 77.

a. Ker sta 2 in 61 praštevili, imata obe po en prafaktor in zato je $2R61$. Ker imata števili $4 = 2^2$ in $62 = 2 \cdot 31$ vsako po dva prafaktorja, je $4R62$. Ker ima $25 = 5^2$ dva prafaktorja, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ pa ima tri, velja $\neg(25R30)$.
b. Ker za vsako število a seveda velja, da ima enako število prafaktorjev kot a, je aRa in je relacija refleksivna. Če ima a enako število prafaktorjev kot b, ima seveda tudi b enako število prafaktorjev kot a, zato za poljubni števili a in b iz aRb sledi, da je tudi bRa. Relacija R je torej simetrična. Če za poljubna števila a, b in c velja, da ima a enako število prafaktorjev kot b in b enako število prafaktorjev kot c, potem sledi, da ima a enako število prafaktorjev kot c. Iz $aRb \wedge bRc$ torej sledi, da je tudi aRc. Relacija R je tako tudi tranzitivna. Ker je relacija R refleksivna, simetrična in tranzitivna, je ekvivalenčna.
c. Ker je $2019 = 2 \cdot 673$, so v $[2019]_R$ števila, ki imajo natanko dva prafaktorja. Najmanjše tako število je $4 = 2^2$.
d. Število 1 je edini element $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, ki nima nobenega praštevilskega delitelja, zato je $[1]_R = \{1\}$.

Rešitev naloge 78.

a. Število 1 nima prafaktorjev, zato ni v relaciji z nobenim številom iz A. Praštevili 5 in 7 sta očitno v relaciji samo sami s seboj, saj nobeno drugo število iz A ni deljivo s 5 oziroma 7. Vsa števila, ki so večja od 1, so v relaciji sama s seboj. Števila 2, 4, 6 in 8 imajo skupni prafaktor 2, števila 3, 6 in 9 pa imajo skupni prafaktor 3.



R

b. Relacija R ni refleksivna, ker $\neg(1R1)$. Če sta $a, b \in A$ poljubni števili, za kateri je aRb, potem ima a skupen prafaktor z b in zato tudi b skupen prafaktor z a. Torej je bRa, to pa pomeni, da je relacija R simetrična. Relacija ni tranzitivna, ker je $2R6$ in $6R9$, vendar pa 2 in 9 nimata skupnega prafaktorja in zato $\neg(2R9)$. Prav tako relacija R ni antisimetrična, saj je $2R4$ in $4R2$, vendar pa ni $2 = 4$.
c. Relacija R ni ekvivalenčna (refleksivna, simetrična in tranzitivna), ker ni niti refleksivna niti tranzitivna. Prav tako ni delna urejenost (refleksivna, antisimetrična in tranzitivna), ker nima nobene od zahtevanih lastnosti.
d. Poljubna elementa iz množice $M = \{2, 4, 6, 8\}$ sta v relaciji, to pa je tudi edina štirielementna podmnožica množice A z zahtevano lastnostjo.

Rešitev naloge 79.

a. Če sta števili a in b v relaciji, to označimo z $\bullet$ na križišču vrstice, ki pripada številu a, in stolpca, ki pripada številu b.

	79	80	82	84	92
79	•	•	•	•	•
80		•			•
82		•	•		•
84		•	•	•	•
92					•

b. Ker ima izraz

$$(\mathsf{x} < \mathsf{x}) \vee (\mathsf{x} = \mathsf{x}) \wedge (\mathsf{y} \geq \mathsf{y})$$

logično vrednost 1, je $\mathsf{xy} R \mathsf{xy}$ za vse $\mathsf{xy} \in A$ in je relacija R refleksivna. Relacija ni simetrična, ker je $82R80$ in $\neg(80R82)$. Dokažimo še, da je R tranzitivna. Naj bodo xy, uv in ab poljubna števila iz A, za katera velja $\mathsf{xy} R \mathsf{uv}$ in $\mathsf{uv} R \mathsf{ab}$. Sledi, da je

$$\begin{aligned}(\mathsf{x} < \mathsf{u}) \vee (\mathsf{x} = \mathsf{u}) \wedge (\mathsf{y} \geq \mathsf{v}) &\sim 1,\\ (\mathsf{u} < \mathsf{a}) \vee (\mathsf{u} = \mathsf{a}) \wedge (\mathsf{v} \geq \mathsf{b}) &\sim 1.\end{aligned}$$

Radi bi videli, da je tudi

$$(\mathsf{x} < \mathsf{a}) \vee (\mathsf{x} = \mathsf{a}) \wedge (\mathsf{y} \geq \mathsf{b}) \sim 1.$$

Označimo

$$\begin{aligned} I_1 &\sim (\mathsf{x} < \mathsf{u}), \\ I_2 &\sim (\mathsf{x} = \mathsf{u}) \wedge (\mathsf{y} \geq \mathsf{v}), \\ I_3 &\sim (\mathsf{u} < \mathsf{a}), \\ I_4 &\sim (\mathsf{u} = \mathsf{a}) \wedge (\mathsf{v} \geq \mathsf{b}). \end{aligned}$$

Vsaj eden od izrazov I_1 ali I_2 je pravilen in vsaj eden od izrazov I_3 ali I_4 je pravilen. Pregledati moramo štiri možnosti.

- Če sta pravilna I_1 in I_3, je $\mathsf{x} < \mathsf{a}$ in $\mathsf{xy}\,R\,\mathsf{ab}$.
- Če sta pravilna I_1 in I_4, je $\mathsf{x} < \mathsf{a}$ in $\mathsf{xy}\,R\,\mathsf{ab}$.
- Če sta pravilna I_2 in I_3, je $\mathsf{x} < \mathsf{a}$ in $\mathsf{xy}\,R\,\mathsf{ab}$.
- Če sta pravilna I_2 in I_4, je $(\mathsf{x} = \mathsf{a}) \wedge (\mathsf{y} \geq \mathsf{b})$ in $\mathsf{xy}\,R\,\mathsf{ab}$.

V vsakem primeru torej velja $\mathsf{xy}\,R\,\mathsf{ab}$ in zato je relacija R tranzitivna.

c. Dokažimo, da za $n = 90$ velja $m\,R\,n$ za vse $m = \mathsf{xy}$ iz A. Potem je $\mathsf{x} \leq 9$ in $\mathsf{y} \geq 0$. Če je $\mathsf{x} < 9$, je disjunkcija

$$(\mathsf{x} < 9) \vee ((\mathsf{x} = 9) \wedge (\mathsf{y} \geq 0))$$

pravilna, ker je pravilen prvi oklepaj. Če je $\mathsf{x} = 9$, potem je zgornja disjunkcija pravilna, ker je pravilen drugi oklepaj. V obeh primerih je torej $\mathsf{xy}\,R\,90$ oziroma $m\,R\,n$.

Rešitev naloge 80. ⇧

a. Ker imata $12 = 2^3 \cdot 3$ in $32 = 2^5$ dva skupna prafaktorja, je $12R32$. Ker imata $36 = 2^2 \cdot 3^2$ in $72 = 2^3 \cdot 3^2$ štiri skupne prafaktorje (2, 2, 3 in 3), velja $\neg(36R72)$. Ker imata $16 = 2^4$ in $32 = 2^5$ štiri skupne prafaktorje (2, 2, 2 in 2), velja $\neg(16R32)$.
b. Relacija R je simetrična. Če ima namreč a največ tri skupne prafaktorje z b, potem ima seveda b največ 3 skupne prafaktorje z a, torej za vse $a, b \in A$ velja $aRb \Rightarrow bRa$. Relacija R ni tranzitivna, ker za $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $20 = 2^2 \cdot 5$ in $180 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ velja $36R20$ in $20R180$, ne velja pa $36R180$.
c. Relacija R ni ekvivalenčna, ker ni refleksivna. Recimo število 16 ni v relaciji s 16, ker ima samo s sabo štiri skupne delitelje (2, 2, 2 in 2).
d. Število 1 nima nobenega prafaktorja, zato z nobenim $n \in A$ nima skupnih prafaktorjev. Velja torej $1Rn$ za vse $n \in A$. Isto velja še za števila oblik p, p^2 in p^3 za vse $p \in \mathbb{P}$.

5. Funkcije

Rešitev naloge 81. ⇧

a. Očitno je $f(1) = 1$. Ker je vsako praštevilo deljivo le z 1 in samim seboj, bo $f(p) = p + 1$ za vsa praštevila $p \in \mathbb{P}$. Izračunamo še $f(4) = 1 + 2 + 4 = 7$, $f(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $f(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $f(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ in $f(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$. Rezultate povzamemo v tabeli:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18

b. Ker lahko število 3 kot vsoto različnih pozitivnih naravnih števil zapišemo le kot $3 = 1 + 2$, bo edino za $n = 2$ veljalo $f(n) = 3$. Opazimo lahko tudi, da je število n vedno deljivo vsaj z 1 in samim seboj, zato bo vedno $f(n) \geq n+1$. Edini števili n, ki bi lahko zadoščali enakosti $f(n) = 3$ sta torej $n = 1$ in $n = 2$, in očitno pogoju zadošča le slednje.
c. Ker je $f(11) = f(6)$, preslikava f ni injektivna. Zato tudi ni bijekcija. Ker ne obstaja število n, za katerega bi veljalo $f(n) = 2$, f ni surjektivna.

Rešitev naloge 82.

a. Velja $f(6) = f(2^1 \cdot 3^1) = 2$, $f(7) = f(7^1) = 1$, $f(8) = f(2^3) = 3$ in $f(9) = f(3^2) = 2$.
b. Taka števila n obstajajo. Na primer, $f(6) = f(10)$, $f(7) = f(11)$ ali pa $f(8) = f(12)$.
c. Dokazati moramo, da za poljubno naravno število $m \in \mathbb{N}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da velja $f(n) = m$. Če je $m = 0$, je lahko $n = 0$. Če je $m > 0$, lahko za n vzamemo produkt prvih m praštevil (ali pa $n = 2^m$). Tedaj bo $f(n) = m$. Ker lahko vsako naravno število m dobimo kot sliko nekega naravnega števila n, je preslikava f surjektivna.
d. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja $f(n) \leq n$. Potem seveda ne more veljati $f(n) = n + 4$ za noben n. Za $n = 0$ in $n = 1$ trditev očitno drži. Naj ima število n praštevilski razcep $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Potem je

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \geq 2^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot 2^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k} \geq \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = f(n).$$

Pri tem zadnji neenačaj velja, ker je $2^\alpha \geq \alpha$ za vse $\alpha \in \mathbb{N}$.

Rešitev naloge 83.

a. Očitno za vsako praštevilo p velja $f(p) = p^2$. Tako je $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(5) = 25$, $f(7) = 49$, $f(11) = 121$. Ker je $4 = 2^2$ in $8 = 2^3$, je $f(4) = 2^2 = 4$ in $f(8) = 2^2 = 4$. Ker je $6 = 2 \cdot 3$ in $12 = 2^2 \cdot 3$, je $f(6) = 2^2 + 3^2 = 13$ in $f(12) = 2^2 + 3^2 = 13$. Ker je $9 = 3^2$, je $f(9) = 3^2 = 9$. Ker je $10 = 2 \cdot 5$, je $f(10) = 2^2 + 5^2 = 29$. Izračunane vrednosti lahko zberemo v tabelo:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	4	9	4	25	13	49	4	9	29	121	13

b. Število 150 moramo zapisati kot vsoto kvadratov različnih praštevil, torej kot vsoto različnih števil iz množice

$$\{4, 9, 25, 49, 121\}.$$

Edini način za to je $150 = 121 + 25 + 4$. Števila, za katera bo $f(n) = 150$, bodo torej imela za praštevilske delitelje natanko 2, 5 in 11. To so torej števila oblike $n = 2^a \cdot 5^b \cdot 11^c$, kjer so $a, b, c \geq 1$ naravna števila. Na primer, $n = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$.
c. Edini kvadrat praštevila, ki je manjši od 8, je 4, zato 8 ne moremo zapisati kot vsoto kvadratov različnih praštevil. To pomeni, da ne obstaja m, za katerega bi bilo $f(m) = 8$.
d. Funkcija f očitno ni injektivna, ker je na primer $f(2) = f(4)$. Prav tako ni surjektivna, ker ne obstaja $m \in \mathbb{N}$, za katerega bi veljalo $f(m) = 8$.

Rešitev naloge 84.

a. Ker je $6 = 2 \cdot 3$, je $f(6) = 5$. Očitno za vsa praštevila velja $f(p) = p$, zato je $f(7) = 7$. Ker je $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, je $f(8) = 6$. Ker je $9 = 3 \cdot 3$, je $f(9) = 6$.
b. Ker je $f(8) = f(9)$, funkcija f ni injektivna.

c. Pokazati moramo, da za vsako naravno število n obstaja naravno število m, da je $f(m) = n$. Recimo, da je n sodo, tj. $n = 2k$ za neko naravno število k. Naj bo $m = 2^k$. Potem je $f(m) = 2k = n$. Če pa je n liho, lahko n zapišemo v obliki $2k+1 = 2(k-1)+3$ za neko naravno število k. Naj bo v tem primeru $m = 2^{k-1} \cdot 3$, pa bo očitno $f(m) = n$. Funkcija f je torej surjektivna.

d. Razmislili smo že, da je $f(p) = p$ za vsa praštevila $p \in \mathbb{P}$. Poglejmo, če obstajajo še kakšne druge rešitve enačbe $f(n) = n$. Naj bo

$$n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

praštevilski razcep števila n. Potem je $f(n) = k_1 \cdot p_1 + \ldots + k_m \cdot p_m$. Iz enakosti $f(n) = n$ dobimo

$$k_1 \cdot p_1 + \ldots + k_m \cdot p_m = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}.$$

Primerjati moramo torej vsoto nekaj števil, ki so večja od 1, s produktom teh istih števil. Z matematično indukcijo zlahka dokažemo, da je $k \cdot p < p^k$ za vsa praštevila $p > 2$ in vse $k \geq 2$. Vsak od sumandov na levi je torej manjši od vsakega od faktorjev na desni, zato je v teh primerih $n < f(n)$. Ostane samo še možnost $p = 2$ in $n = 2^k$. Tedaj je $f(n) = k \cdot 2$ in $k \cdot 2 = 2^k$ samo v primeru, ko je $k = 2$. Ena preostala rešitev je torej $n = 2^2$. Takrat je $f(n) = 2 + 2 = 4 = n$.

Rešitev naloge 85.

a. Izračunamo

$$\begin{aligned} f(16) &= f(2^4) = 1, \\ f(24) &= f(2^3 \cdot 3) = 2, \\ f(80) &= f(2^4 \cdot 5) = 2, \\ f(90) &= f(2 \cdot 3^2 \cdot 5) = 3, \\ f(315) &= f(3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 3. \end{aligned}$$

b. Za vsako naravno število $m \in \mathbb{N}$ moramo poiskati $n \in \mathbb{N}$, za katerega bo veljalo $f(n) = m$. Za n lahko vzamemo produkt prvih m praštevil (ali pa katerihkoli m različnih praštevil). Potem je očitno $f(n) = m$, zato je f surjektivna.

c. Označimo množico prafaktorjev števila n s P_n. Potem je $f(n) = |P_n|$, kjer $|P_n|$ označuje moč množice P_n. Ker praštevilski delitelji števila mn delijo vsaj eno od števil m in n in vsak delitelj števila m ali n deli mn, je $P_{mn} = P_m \cup P_n$. Torej velja

$$\begin{aligned} f(mn) &= |P_{mn}| = |P_m \cup P_n| = \\ &= |P_m| + |P_n| - |P_m \cap P_n| \leq |P_m| + |P_n| = \\ &= f(m) + f(n), \end{aligned}$$

pri čemer enakost velja natanko tedaj, ko je $|P_m \cap P_n| = \emptyset$, torej natanko tedaj, ko sta m in n tuji.

d. Opazimo, da za praštevila $p \in \mathbb{P}$ velja $f(p) = 1$. Poiščimo naravno število, ki ima vsaj tri praštevilske delitelje in ga lahko zapišemo kot vsoto dveh praštevil. Najmanjši kandidat je število $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Ker je $30 = 11 + 19$, lahko vzamemo $m = 11$, $n = 19$. Po eni strani je $f(m+n) = f(30) = 3$, po drugi pa $f(m) + f(n) = f(11) + f(19) = 1 + 1 = 2$. Torej je za $m = 11$ in $n = 19$ res $f(m+n) > f(m) + f(n)$.

Rešitev naloge 86.

a. Rezultate povzamemo v tabeli:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

b. Funkcija φ očitno ni injektivna. Poiskati moramo en primer dveh različnih števil, ki se preslikata v isto vrednost. Na primer $\varphi(1) = \varphi(2)$.
Če zgoraj izračunane vrednosti pozorno pogledamo, opazimo da manjkajo skoraj vsa liha števila. Edino liho število, ki se pojavi, je 1. Dokažimo, da je vrednost $\varphi(n)$ za $n \geq 3$ vedno sodo število. S tem bomo dokazali, da funkcija φ ni surjektivna, saj za noben $n \in \mathbb{N}$ ne bo (na primer) $f(n) = 3$.
Števila med 1 in n, ki so tuja n, vedno nastopajo v parih: če je $\gcd(n,k) = 1$, potem je tudi $\gcd(n, n-k) = 1$. Seveda je pri tem $k \neq n-k$, sicer bi veljalo $k = \frac{n}{2}$, to pa bi bilo v protislovju s predpostavko, da je $\gcd(n,k) = 1$. Ker ima vsako število med 1 in n, ki je tuje n, natančno določenega od sebe različnega partnerja, je vseh teh števil sodo mnogo.
Alternativno lahko to trditev dokažemo s pomočjo formule

$$\varphi\left(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}\right) = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_1 - 1)\dots(p_k - 1).$$

Če ima n od 2 različen praštevilski delitelj p, se bo v faktorizaciji $\varphi(n)$ pojavil faktor $p-1$, ki je sodo število. Če je $n = 2^k$, $k \geq 2$, je $\varphi(n) = 2^{k-1}$, kar je sodo število.

c. Naj bo n sodo število. Med števili

$$1, 2, \dots, n-1, n$$

je vsako drugo sodo, zato ni tuje n (največji skupni delitelj je vsaj 2). Ker je takih števil vsaj $\frac{n}{2}$, je števil, ki so n tuja, največ $\frac{n}{2}$, in zato je $\varphi(n) \leq \frac{n}{2}$.

d. Pokazali smo že, da je za $n \geq 3$ število $\varphi(n)$ sodo. Lahko torej pišemo $\varphi(n) = 2k$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Seveda je vedno $\varphi(n) < n$, zato je $2k < n$ oziroma $k < \frac{n}{2}$. Iz prejšnje točke zato sledi, da je

$$\varphi(\varphi(n)) = \varphi(2k) \leq \frac{2k}{2} = k < \frac{n}{2},$$

kar je bilo potrebno dokazati.

Rešitev naloge 87. ⇧

a. Nalogo lahko rešimo tako, da po definiciji pokažemo injektivnost in surjektivnost funkcije f. Druga možnost pa je, da poiščemo funkcijo f^{-1}, ki je levi in desni inverz funkcije f. Od tod bo sledilo, da je f zaporedoma injektivna in surjektivna, zato je bijekcija. Brez težav uganemo, da je $f^{-1}(x) = x - 8$. Res,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+8) = (x+8) - 8 = x$$

in

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x-8) = (x-8) + 8 = x,$$

zato je funkcija, ki smo jo označili z f^{-1} res levi in desni inverz funkcije f.
Seveda je

$$|x - f(x)| = |x - (x+8)| = |-8| = 8 > 3.$$

b. Ker velja $g(g(x)) = -(-x) = x$, je funkcija g kar sama sebi inverz in zato bijekcija.
Oglejmo si razlike

$$|x - g(x)| = |x - (-x)| = |2x| = 2|x|.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|n - g(n)| = 2n \geq n$, kar pomeni, da so razlike res poljubno velike.

c. Za tiste $n \in \mathbb{Z}$, ki zadoščajo pogoju $n \geq 4$ ali $n \leq -4$, lahko vzamemo kar $h(x) = -x$. Po zgoraj dokazanem bo razlika $|n-h(n)| > 2n$ in tako poljubno velika, hkrati pa bo seveda večja od 3. Za števila iz $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ pa naj bo

$$h(-3) = 0,\ h(-2) = 1,\ h(-1) = 2,\ h(0) = 3$$

in

$$h(1) = -3,\ h(2) = -2,\ h(3) = -1.$$

Tako definirana funkcija h očitno zadošča obema pogojema.

Rešitev naloge 88.

a. Dobimo

$$\begin{aligned} f(1,1) &= (1+1,1-1) = (2,0), \\ f(1,2) &= (1+2,1-2) = (3,-1), \\ f(2,1) &= (2+1,2-1) = (3,1). \end{aligned}$$

b. Iz pogoja $f(x,y) = (3,6)$ dobimo $(x+y, x-y) = (3,6)$ oziroma sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$\begin{aligned} x+y &= 3, \\ x-y &= 6. \end{aligned}$$

Ker rešitev $x = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$ ne zadošča pogoju $x,y \in \mathbb{Z}$, takih parov (x,y) ni.

c. Iz pogoja $f(x,y) = (3,7)$ dobimo sistem

$$\begin{aligned} x+y &= 3, \\ x-y &= 7, \end{aligned}$$

ki ima celoštevilsko rešitev $(x,y) = (5,-2)$.

d. Iz pogoja $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$ dobimo

$$\begin{aligned} x_1+y_1 &= x_2+y_2, \\ x_1-y_1 &= x_2-y_2. \end{aligned}$$

Če enakosti seštejemo in delimo z 2 dobimo $x_1 = x_2$, če od prve odštejemo drugo in delimo z 2 pa $y_1 = y_2$. Torej velja $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ in funkcija f je zato injektivna.

Funkcija f bo surjektivna, če bo za vsak par $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ obstajal par (x,y), za katerega bo $f(x,y) = (a,b)$. Zgoraj smo se že prepričali, da v primeru, ko je $a = 3$ in $b = 6$, tak par (x,y) ne bo obstajal, torej funkcija f ni surjektivna. Ker ni surjektivna, tudi ni bijekcija.

Rešitev naloge 89.

a. Pri 11, 13, 17 in 19 je odgovor naslednje praštevilo, torej 13, 17, 19 in 23. Za ostala števila poiščemo praštevilske razcepe in določimo praštevilo, ki je večje od vseh prafaktorjev:

$$\begin{array}{rclrcl} 12 &=& 2^2\cdot 3, & f(12) &=& 5,\\ 14 &=& 2\cdot 7, & f(14) &=& 11,\\ 15 &=& 3\cdot 5, & f(15) &=& 7,\\ 16 &=& 2^4, & f(16) &=& 3,\\ 18 &=& 2\cdot 3^2, & f(18) &=& 5,\\ 20 &=& 2^2\cdot 5, & f(20) &=& 7. \end{array}$$

Rezultate zberemo v tabeli:

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	13	5	17	11	7	3	19	5	23	7

b. Ker je $f(2) = f(4) = 3$, preslikava f ni injektivna. Ker je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{P} \cup \{0\}$, je $\mathcal{Z}_f \neq \mathbb{N}$ in zato preslikava f ni surjektivna. Na primer, $1 \notin \mathcal{Z}_f$.

c. Za preslikavo F velja, da je $F(n) > n$ za $n \neq 0$, torej $1 \notin \mathcal{Z}_F$ in preslikava F ni surjektivna. Dokažimo, da je injektivna. Očitno je $F(n) = 0$ le pri $n = 0$. Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}$ poljubni od 0 različni naravni števili in naj bo $f(m) = p$ ter $f(n) = q$. Predpostavimo, da je $F(m) = F(n)$ oziroma $m \cdot f(m) = n \cdot f(n)$ in dokažimo, da mora biti v tem primeru $m = n$. Če bi veljalo $p > q$, potem bi bili vsi prafaktorji števila n, ki so manjši od q, manjši tudi od p, od koder bi sledilo, da p ne deli n. Seveda pa p ne deli q, ker smo predpostavili, da sta p in q različni praštevili. Potem pa p deli levo stran enakosti $m \cdot f(m) = n \cdot f(n)$, desne strani pa ne. Iz tega protislovja lahko sklepamo, da ne more biti $p > q$. Simetrični argument bi pokazal, da ne more biti $q > p$. Torej je $p = q = f(m) = f(n)$ in s krajšanjem iz $m \cdot f(m) = n \cdot f(n)$ dobimo $m = n$. Preslikava F je torej injektivna.

Rešitev naloge 90.

a. Dobimo $f(11) = 2$, $f(12) = 5$, $f(13) = 2$, $f(14) = 3$ in $f(15) = 2$.

b. Ker je $f(11) = f(13)$, preslikava f ni injektivna. Ker je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{P} \cup \{0\} \neq \mathbb{N}$, preslikava f ni surjektivna.

c. Pogoju $f(n) \geq n$ očitno zadoščata števili $n = 0$ in $n = 2$, saj je $f(0) = 0$ in $f(2) = 3 \geq 2$. Obstaja še kakšna rešitev? Očitno je $f(n) \neq n$ za vse $n \neq 0$. Iščemo torej števila n, za katera bo $f(n) > n$ oziroma $f(n) \geq n + 1$. Naj bo

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

množica vseh praštevil, urejenih po velikosti. Če v praštevilskem razcepu za n za nek i praštevilo p_i ne nastopa, p_{i+1} pa, potem je $f(n) = p_i < n$. Zanimajo nas torej le števila n, ki imajo praštevilski razcep oblike

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

v katerem ne manjka nobeno praštevilo med p_1 in p_k. Za tak n velja $f(n) = p_{k+1}$. Oglejmo si število $q = p_1 \cdots p_k + 1$. Gotovo ni deljivo z nobenim od praštevil $p_1, \ldots, p_k$, torej je deljivo s katerim od praštevil $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ ali pa enako kateremu od njih. V vsakem primeru je $q \geq p_{k+1}$. Torej je

$$f(n) = p_{k+1} \leq q = p_1 \ldots p_k + 1 \leq p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} + 1 = n + 1.$$

Za iskana števila n (razen primera $n = 0$ zgoraj) torej velja $n + 1 \leq f(n) \leq n + 1$ oziroma $f(n) = n + 1 \in \mathbb{P}$. Ker med p_k in $p_{k+1} = n + 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} + 1$ ne sme biti drugih praštevil, gotovo pa bi bili vmes kateri izmed praštevilskih deliteljev števila $q = p_1 \dots p_k + 1$, mora veljati še $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1$. Torej so kandidati za rešitve le tista števila n, ki so oblike $n = p_1 \dots p_k$ (produkt prvih nekaj praštevil). Rešitve so tisti izmed kandidatov, za katere je $p_{k+1} = p_1 \dots p_k + 1$.

d. Iščemo vse n, ki rešijo enačbo $n \cdot f(n) = 42$. Očitno $n = 0$ ni rešitev, zato lahko predpostavimo, da je $n > 0$. Ker je $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ in je za $n > 0$ vrednost $f(n)$ praštevilo, moramo ločiti tri primere:
   - $f(n) = 2$, $n = 3 \cdot 7 = 21$ in $F(21) = 42$,
   - $f(n) = 3$, $n = 2 \cdot 7 = 14$ in $F(14) = 42$,
   - $f(n) = 7$, $n = 2 \cdot 3 = 6$ in $F(6) = 30 \neq 42$.

   Edini rešitvi sta torej $n = 14$ in $n = 21$.

e. Ker je $F(14) = F(21)$, preslikava F ni injektivna. Za $n > 0$ je $F(n) > n$, torej $1 \notin \mathcal{Z}_F$ in F ni surjektivna.

Rešitev naloge 91.

a. Ker je $f(0) = f(10)$, f ni injektivna.
b. Naravna števila med 0 in 9 dobimo kar kot slike enomestnih števil od 0 do 9, poleg tega pa je $f(25) = 2 \cdot 5 = 10$. Prvo število, ki ga ne moremo dobiti je torej število 11, ki ga očitno ne moremo zapisati kot produkt števk od 0 do 9.
c. Naj bo $m \in \mathcal{Z}_f$. Potem obstaja nek $n \in \mathbb{N}$, za katerega je $f(n) = m$. Za poljuben $k \in \mathbb{N}$ naj bo n_k število, ki ga dobimo tako, da številu n dodamo na začetku k enic. Potem je $f(n_k) = f(\overline{1 \dots 1 n}) = 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot m = m$. Za vsak $m \in \mathbb{Z}_f$ je rešitev torej neskončno.

Rešitev naloge 92.

a. Funkcija f ni injektivna, ker je $f(2) = f(4) = 4$.
b. Funkcija f ni surjektivna, ker je
$$\mathcal{Z}_f = \{0,1\} \cup \{pq \,;\, p,q \in \mathbb{P}\} \cup \{p^2 \,;\, p \in \mathbb{P}\} \neq \mathbb{N}.$$
c. Naj bo $f(n) = pq$, pri čemer sta p in q (ne nujno različni) praštevili. Potem je
$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(pq) = pq = f(n),$$
torej je $f \circ f = f$ oziroma
$$(f \circ f)(n) = \text{produkt največjega in najmanjšega prafaktorja števila } n.$$
d. Če želimo, da bo $f(n) = n$, mora biti $n \in \mathcal{Z}_f$. Seveda pa je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(pq) = pq$ in $f(p^2) = p^2$. Rešitve enačbe $f(n) = n$ so torej natanko števila iz $\mathcal{Z}_f$.

6. Moč množic

Rešitev naloge 93.

a. Označimo z S, M in L množico tistih anketirancev, ki svojemu mleku dodajo sladkor, mleko oziroma limono, x pa naj označuje število tistih, ki čaju ne dodajo ničesar. Iz podatkov naloge preberemo, da je $|S| = 32$, $|M| = 3|L|$, $|M \cap L| = 0$, $|S \cap M \cap L| = 0$, $|S \cap M| = 12$ in $|S \cap L| = 10$. Poleg tega je $|L| = x$. Ker je $|\mathcal{U}| = |S \cup M \cup L| + x$, lahko z uporabo načela vključitev-izključitev za tri množice izpeljemo enakost
$$|\mathcal{U}| = |S| + |M| + |L| - |S \cap M| - |S \cap L| - |M \cap L| + |S \cap M \cap L| + x.$$

Vstavimo zgoraj zapisane podatke in rešimo enačbo:

$$\begin{aligned} 100 &= 32+3x+x-12-10-0+0+x, \\ 90 &= 5x, \\ x &= 18. \end{aligned}$$

Sklepamo, da 18 vprašanih čaju ne doda ničesar.

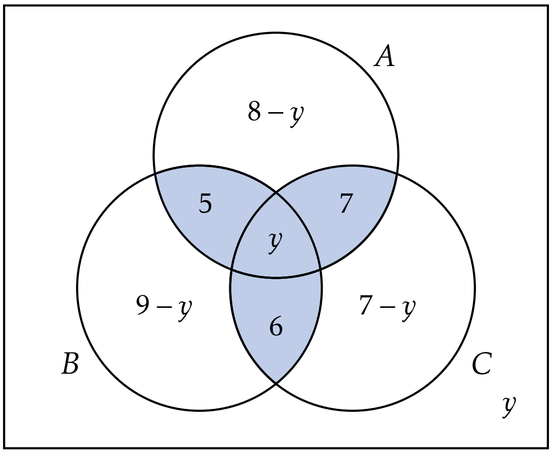
b. Iščemo še $|M \cap S^c \cap L^c| = |M \cap S^c| = |M| - |M \cap S| = 3x - 12 = 42$. Samo mleko torej doda 42 vprašanih.

Rešitev naloge 94.

Označimo množice tekmovalcev, ki so jih izbrali prvi, drugi in tretji sodnik z A, B in C. Iščemo

$$x = |(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)|.$$

Iz besedila naloge razberemo, da je $|\mathcal{U}| = 40$, $|A| = |B| = |C| = 20$, $|A \cap B \cap C^c| = 5$, $|B \cap C \cap A^c| = 6$, $|A \cap C \cap B^c| = 7$ in $|A^c \cap B^c \cap C^c| = |A \cap B \cap C| = y$. Narišimo skico.



Zanima nas število elementov v obarvanem območju. Dobimo jih tako, da od $|\mathcal{U}|$ odštejemo elemente v nepobarvanem območju:

$$x = 40 - y - (7-y) - (8-y) - (9-y) = 16 + 2y.$$

Seveda pa lahko x izrazimo tudi tako, da za množice $A \cap B$, $B \cap C$ in $A \cap C$ uporabili načelo vključitev-izključitev:

$$\begin{aligned} x &= |(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)| = \\ &= |(A \cap B)| + |(B \cap C)| + |(A \cap C)| - 3|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ &= |(A \cap B)| + |(B \cap C)| + |(A \cap C)| - 2|A \cap B \cap C| = \\ &= (5+y) + (6+y) + (7+y) - 2y = \\ &= 18 + y. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$(A \cap B) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C) = (B \cap C) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Če dobljena izraza za x izenačimo, dobimo

$$\begin{aligned} 16 + 2y &= 18 + y, \\ y &= 2, \end{aligned}$$

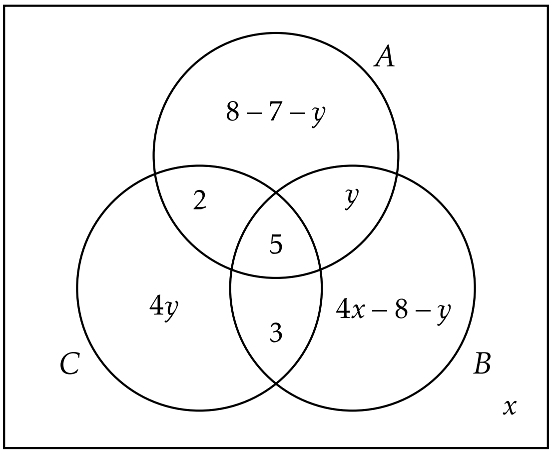
od koder takoj sledi, da je $x = 20$. V naslednji krog se je torej uvrstilo 20 tekmovalcev.

Rešitev naloge 95.

Naj bodo A, B in C množice uslužbencev, ki delajo na prvem, drugem oziroma tretjem projektu. Naj bo x število uslužbencev, ki ne delajo na nobenem od novih projektov in $y = |A \cap B \cap C^c|$ število tistih, ki delajo samo na prvem in drugem. Iz besedila naloge razberemo, da je

$$|A| = 8,\ |B| = 4x,\ y = 4|C \cap A^c \cap B^c|,\ |B \cap C| = 8,\ |A \cap C| = 7 \text{ in } |A \cap B \cap C| = 5.$$

Za lažjo predstavo narišimo skico.



Ker mora biti $8 - 7 - y \geq 0$, imamo za y samo dve možnosti, $y = 0$ ali $y = 1$. Če bi bil $y = 0$, bi iz zveze $31 = |\mathcal{U}| = |A \cup B \cup C| + x$ dobili

$$31 = 4x + 2 + 1 + x,$$

od koder bi izračunali $x = \frac{28}{5}$. Ker v tem primeru x ni naravno število, možnost $y = 0$ odpade. Sklepamo, da mora biti $y = 1$. Podobno kot v prejšnjem primeru dobimo enačbo

$$31 = 4x + 4 + 2 + x,$$

a tokrat je rešitev $x = 5$. Z nekaj dela se prepričamo, da so v tem primeru vse vpletene vrednosti naravna števila. Izračunamo še $|B| = 4x = 20$ in $|C| = 4y + 2 + 3 + 5 = 14$. Največji projekt je torej drugi in na njem je zaposlenih 20 ljudi, 5 ljudi pa ne dela na nobenem od novih projektov.

Rešitev naloge 96.

a. Označimo z A_k podmnožico vseh števil iz A, ki so deljiva s k. Potem je

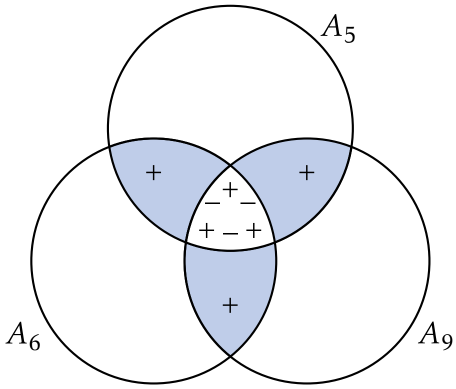
$$|A_k| = \left\lfloor \frac{300}{k} \right\rfloor,\ |A_k \cap A_l| = \left\lfloor \frac{300}{\mathrm{lcm}(k,l)} \right\rfloor \text{ in } |A_k \cap A_l \cap A_m| = \left\lfloor \frac{300}{\mathrm{lcm}(k,l,m)} \right\rfloor,$$

ker je $A_k \cap A_l = A_{\mathrm{lcm}(k,l)}$ in $A_k \cap A_l \cap A_m = A_{\mathrm{lcm}(k,l,m)}$. Izračunamo $\mathrm{lcm}(5,6) = 30$, $\mathrm{lcm}(5,9) = 45$, $\mathrm{lcm}(6,9) = 18$ in $\mathrm{lcm}(5,6,9) = 90$. Iščemo moč množice $M = A_5 \cup A_6 \cup A_9$. Uporabimo načelo vključitev-izključitev, pa dobimo

$$\begin{aligned}
|M| &= |A_5| + |A_6| + |A_9| - |A_5 \cap A_6| - |A_5 \cap A_9| - |A_6 \cap A_9| + |A_5 \cap A_6 \cap A_9| = \\
&= |A_5| + |A_6| + |A_9| - |A_{30}| - |A_{45}| - |A_{18}| + |A_{90}| = \\
&= \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{45} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{90} \right\rfloor = \\
&= 60 + 50 + 33 - 10 - 6 - 16 + 3 = \\
&= 114.
\end{aligned}$$

b. Števila, ki so deljiva z natanko dvema od števil 5, 6 in 9, so natanko elementi množice

$$N = (A_5 \cap A_6 \cap A_9^c) \cup (A_5 \cap A_6^c \cap A_9) \cup (A_5^c \cap A_6 \cap A_9).$$



Izračunamo

$$\begin{aligned}
|N| &= |A_5 \cap A_6| + |A_5 \cap A_9| + |A_6 \cap A_9| - 3|A_5 \cap A_6 \cap A_9| = \\
&= |A_{30}| + |A_{45}| + |A_{18}| - 3|A_{90}| = \\
&= \left\lfloor \frac{300}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{45} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{18} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{90} \right\rfloor = \\
&= 10 + 6 + 16 - 9 = \\
&= 23.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 97.

a. Prešteli bomo, koliko števil ustreza pogoju v množici $C = \{1, 2, \ldots, 720\}$ in koliko jih ustreza pogoju v množici $D = \{1, 2, \ldots, 359\}$, nato pa rezultata odšteli. Iščemo torej moči množic $C_3 \cup C_5$ in $D_3 \cup D_5$. Uporabimo načelo vključitev-izključitev, pa dobimo

$$\begin{aligned}
|C_3 \cup C_5| &= |C_3| + |C_5| - |C_3 \cap C_5| = \\
&= |C_3| + |C_5| - |C_{15}| = \\
&= \left\lfloor \frac{720}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{720}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{720}{15} \right\rfloor = \\
&= 240 + 144 - 48 = \\
&= 336
\end{aligned}$$

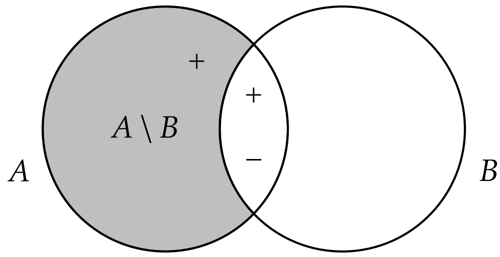
in

$$\begin{aligned}
|D_3 \cup D_5| &= |D_3| + |D_5| - |D_3 \cap D_5| = \\
&= |D_3| + |D_5| - |D_{15}| = \\
&= \left\lfloor \frac{359}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{359}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{359}{15} \right\rfloor = \\
&= 119 + 71 - 23 = \\
&= 167.
\end{aligned}$$

Števil, ki zadoščajo pogoju, je torej $336 - 167 = 169$.

b. Števila, ki so deljiva z 2 ali 3 ali 5 ne pa s 15, so natanko elementi množice $M = (B_2 \cup B_3 \cup B_5) \setminus B_{15}$. Uporabili bomo enakost

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|.$$



Dobimo

$$\begin{aligned}
|M| &= |B_2 \cup B_3 \cup B_5| - |(B_2 \cup B_3 \cup B_5) \cap B_{15}| = \\
&= |B_2 \cup B_3 \cup B_5| - |(B_2 \cap B_{15}) \cup (B_3 \cap B_{15}) \cup (B_5 \cap B_{15})| = \\
&= |B_2 \cup B_3 \cup B_5| - |B_{30} \cup B_{15} \cup B_{15}| = \\
&= |B_2 \cup B_3 \cup B_5| - |B_{30} \cup B_{15}| = \\
&= |B_2 \cup B_3 \cup B_5| - |B_{15}| = \\
&= |B_2| + |B_3| + |B_5| - |B_6| - |B_{10}| - |B_{15}| + |B_{30}| - |B_{15}| = \\
&= |B_2| + |B_3| + |B_5| - |B_6| - |B_{10}| - 2 \cdot |B_{15}| + |B_{30}| = \\
&= \left\lfloor \frac{360}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{360}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{360}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{360}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{360}{10} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{360}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{360}{30} \right\rfloor = \\
&= 180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 2 \cdot 24 + 12 = \\
&= 240.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 98.

a. Števila iz A, ki so deljiva z vsaj enim od števil 2, 6 in 8 ležijo v uniji $M = A_2 \cup A_6 \cup A_8$. Ker je $A_2 \cap A_6 = A_6$, $A_2 \cap A_8 = A_8$, $A_6 \cap A_8 = A_{24}$ in $A_2 \cap A_6 \cap A_8 = A_{24}$, je

$$\begin{aligned}
|M| &= |A_2| + |A_6| + |A_8| - |A_6| - |A_8| - |A_{24}| + |A_{24}| = |A_2| = \\
&= \left\lfloor \frac{1024}{2} \right\rfloor = 512.
\end{aligned}$$

b. Števila iz A, ki so deljiva z 2 in 6 in ne 8, so v množici

$$N = (A_2 \cap A_6) \setminus A_8 = A_6 \setminus A_8,$$

zato je

$$\begin{aligned}
|N| &= |A_6 \setminus A_8| = \\
&= |A_6| - |A_6 \cap A_8| = \\
&= |A_6| - |A_{24}| = \\
&= \left\lfloor \frac{1024}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1024}{24} \right\rfloor = \\
&= 170 - 42 = \\
&= 128.
\end{aligned}$$

c. Nazadnje iščemo še moč množice

$$L = A_6 \cap A_8^c \cap A_9^c = A_6 \cap (A_8 \cup A_9)^c = A_6 \setminus (A_8 \cup A_9).$$

Dobimo

$$\begin{aligned}
|L| &= |A_6| - |A_6 \cap (A_8 \cup A_9)| = \\
&= |A_6| - |(A_6 \cap A_8) \cup (A_6 \cap A_9)| = \\
&= |A_6| - |A_{24} \cup A_{18}| = \\
&= |A_6| - (|A_{24}| + |A_{18}| - |A_{24} \cap A_{18}|) = \\
&= |A_6| - |A_{24}| - |A_{18}| + |A_{72}| = \\
&= \left\lfloor \frac{1024}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1024}{24} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1024}{18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1024}{72} \right\rfloor = \\
&= 170 - 42 - 56 + 14 = 86.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 99.

Iščemo moč množice $M = (A_4 \cup A_6 \cup A_9) \setminus A_{12}$.

$$\begin{aligned}
|M| &= |(A_4 \cup A_6 \cup A_9) \setminus A_{12}| = \\
&= |(A_4 \cup A_6 \cup A_9)| - |(A_4 \cup A_6 \cup A_9) \cap A_{12}| = \\
&= |(A_4 \cup A_6 \cup A_9)| - |(A_4 \cap A_{12}) \cup (A_6 \cap A_{12}) \cup (A_9 \cap A_{12})| = \\
&= |(A_4 \cup A_6 \cup A_9)| - |A_{12} \cup A_{12} \cup A_{36}| = \\
&= |(A_4 \cup A_6 \cup A_9)| - |A_{12} \cup A_{36}| = \\
&= |(A_4 \cup A_6 \cup A_9)| - |A_{12}| = \\
&= |A_4| + |A_6| + |A_9| - |A_{12}| - |A_{36}| - |A_{18}| + |A_{36}| - |A_{12}| = \\
&= |A_4| + |A_6| + |A_9| - 2 \cdot |A_{12}| - |A_{18}| = \\
&= \left\lfloor \frac{16000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16000}{9} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{16000}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{16000}{18} \right\rfloor = \\
&= 4000 + 2666 + 1777 - 2 \cdot 1333 - 888 = \\
&= 4889.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 100.

Iščemo moč množice $M = M_{3,5,7} \cup M_{3,5,9} \cup M_{3,7,9} \cup M_{5,7,9}$, kjer je

$$\begin{aligned}
M_{3,5,7} &= A_3 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_9^c = A_{105} \cap A_9^c, \\
M_{3,5,9} &= A_3 \cap A_5 \cap A_7^c \cap A_9 = A_{45} \cap A_7^c, \\
M_{3,7,9} &= A_3 \cap A_5^c \cap A_7 \cap A_9 = A_{63} \cap A_5^c, \\
M_{5,7,9} &= A_3^c \cap A_5 \cap A_7 \cap A_9 = \emptyset.
\end{aligned}$$

Opazimo, da so dobljene tri neprazne množice disjunktne. Res, vsako število iz prve množice je deljivo s 7, zato ne more biti v drugi množici, in s 5, zato ne more biti v tretji množici. Podobno razmislimo, da števila iz druge množice ne morejo biti v prvi ali tretji, števila iz tretje pa ne v prvih dve. Ker so množice disjunktne, dobimo

$$\begin{aligned}
|M| &= |(A_{105} \cap A_9^c) \cup (A_{45} \cap A_7^c) \cup (A_{63} \cap A_5^c)| = \\
&= |A_{105} \cap A_9^c| + |A_{45} \cap A_7^c| + |A_{63} \cap A_5^c| = \\
&= |A_{105}| - |A_{105} \cap A_9| + |A_{45}| - |A_{45} \cap A_7| + |A_{63}| - |A_{63} \cap A_5| = \\
&= |A_{105}| - |A_{315}| + |A_{45}| - |A_{315}| + |A_{63}| - |A_{315}| = \\
&= \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{45} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{63} \right\rfloor - 3 \cdot \left\lfloor \frac{1000}{315} \right\rfloor = \\
&= 9 + 22 + 15 - 3 \cdot 3 = 37.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 101.

Iskana števila pripadajo množici $M = (A_{15} \cup A_{21}) \setminus A_{49}$. Zato je

$$\begin{aligned}
|M| &= |(A_{15} \cup A_{21}) \setminus A_{49}| = \\
&= |A_{15} \cup A_{21}| - |(A_{15} \cup A_{21}) \cap A_{49}| = \\
&= |A_{15} \cup A_{21}| - |(A_{15} \cap A_{49}) \cup (A_{21} \cap A_{49})| = \\
&= |A_{15} \cup A_{21}| - |A_{735} \cup A_{147}| = \\
&= |A_{15}| + |A_{21}| - |A_{105}| - (|A_{735}| + |A_{147}| - |A_{735}|) = \\
&= |A_{15}| + |A_{21}| - |A_{105}| - |A_{147}| = \\
&= \left\lfloor \frac{2018}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2018}{105} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2018}{147} \right\rfloor = \\
&= 134 + 96 - 19 - 13 = \\
&= 198.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 102.

a. Iščemo $|A_6 \cup A_9 \cup A_{21}|$. Ker je

$$\begin{aligned}
\operatorname{lcm}(6,9) &= 18, \\
\operatorname{lcm}(6,21) &= 42, \\
\operatorname{lcm}(9,21) &= 63, \\
\operatorname{lcm}(6,9,21) &= 126,
\end{aligned}$$

je $A_6 \cap A_9 = A_{18}$, $A_6 \cap A_{21} = A_{42}$, $A_9 \cap A_{21} = A_{63}$ in $A_6 \cap A_9 \cap A_{21} = A_{126}$. Z uporabo načela vključitev-izključitev dobimo

$$\begin{aligned}
|A_6 \cup A_9 \cup A_{21}| &= |A_6| + |A_9| + |A_{21}| - |A_{18}| - |A_{42}| - |A_{63}| + |A_{126}| = \\
&= \left\lfloor \frac{1260}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1260}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1260}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1260}{18} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1260}{42} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1260}{63} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1260}{126} \right\rfloor = \\
&= 210 + 140 + 60 - 70 - 30 - 20 + 10 = \\
&= 300.
\end{aligned}$$

b. Tokrat iščemo $|(A_6 \cap A_9) \cup A_{21}|$. Če upoštevamo, da je $A_6 \cap A_9 = A_{18}$ in uporabimo načelo vključitev-izključitev za dve množici, dobimo

$$\begin{aligned}
|(A_6 \cap A_9) \cup A_{21}| &= |A_{18} \cup A_{21}| = \\
&= |A_{18}| + |A_{21}| - |A_{18} \cap A_{21}| = \\
&= |A_{18}| + |A_{21}| - |A_{126}| = \\
&= \left\lfloor \frac{1260}{18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1260}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1260}{126} \right\rfloor = \\
&= 70 + 60 - 10 = \\
&= 120.
\end{aligned}$$

7. Teorija števil

Rešitev naloge 103.

a. Ker je $\gcd(68, 119) = 17$ in 17 deli 2057, je enačba rešljiva. Delimo jo z 17 in dobimo ekvivalentno enačbo

$$4x + 7y = 121,$$

za katero zlahka uganemo eno rešitev: $x_0 = y_0 = 11$. Vse rešitve so oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 11 + 7k, \\ y_k &= 11 - 4k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

b. Naravne rešitve dobimo tako, da rešimo sistem neenačb

$$\begin{aligned} x_k &\geq 0, \\ y_k &\geq 0. \end{aligned}$$

Iz prve neenakosti dobimo $11 + 7k \geq 0$ oziroma $k \geq -\frac{11}{7}$, torej je $k \geq -1$. Iz druge neenakosti dobimo $11 - 4k \geq 0$ oziroma $k \leq \frac{11}{4}$, torej je $k \leq 2$. Rešitve so torej naravna števila za $k = -1, 0, 1, 2$. Zberemo jih v tabeli:

k	-1	0	1	2
x_k	4	11	18	25
y_k	15	11	7	3

Rešitev naloge 104.

Ker je 15 ur enako $15 \cdot 60 = 900$ minut, dobimo diofantsko enačbo

$$16x + 18y = 900.$$

Enačbo delimo z 2, da dobimo ekvivalentno enačbo

$$8x + 9y = 450,$$

ki ima očitno rešitev $x_0 = 0$, $y_0 = 50$. Vse rešitve so torej oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 0 + 9k, \\ y_k &= 50 - 8k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker x in y predstavljata število rešenih nalog, morata biti nenegativni. Možne rešitve zberemo v tabelo:

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0	9	18	27	36	45	54
y_k	50	42	34	26	18	10	2

Razlika $|x_k - y_k|$ je najmanjša pri $k = 3$. Študent mora torej rešiti 27 nalog iz OMA in 26 nalog iz DS.

Rešitev naloge 105.

a. Znamke stanejo 102 centa in 72 centov, radi pa bi plačali znesek 1800 centov, zato se pripadajoča diofantska enačba glasi

$$102x + 72y = 1800.$$

b. Enačbo delimo z $\gcd(102, 72) = 6$, pa dobimo

$$17x + 12y = 300.$$

V tej obliki zlahka uganemo eno rešitev: $x_0 = 0$, $y_0 = 25$. Vse rešitve so torej oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 0 + 12k, \\ y_k &= 25 - 17k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker morata biti števili znamk nenegativni, dobimo:

k	0	1
x_k	0	12
y_k	25	8

c. Od zgornjih rešitev je le ena taka, kjer uporabimo znamke obeh vrst. Potrebujemo 12 znamk za 1.02 € in 8 znamk za 0.72 €.

Rešitev naloge 106.

Zneske pretvorimo v cente in dobimo diofantsko enačbo

$$105x + 75y = 1350.$$

Ker so vsi koeficienti deljivi z $\gcd(105, 75) = 15$, je enačba rešljiva in ekvivalentna enačbi

$$7x + 5y = 90.$$

Eno rešitev zlahka uganemo: $x_0 = 0$, $y_0 = 18$. Vse rešitve so oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 0 + 5k, \\ y_k &= 18 - 7k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker morata biti števili znamk nenegativni, dobimo:

k	0	1	2
x_k	0	5	10
y_k	18	11	4

Najmanj znamk bomo uporabili pri $k = 2$. Potrebujemo torej 10 znamk za 1.05 € in 4 znamke za 0.75 €.

Rešitev naloge 107.

Poiskati moramo nenegativne rešitve diofantske enačbe

$$41x + 37y = 1490.$$

Eno rešitev bomo dobili s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma:

$$\begin{aligned} 41 &= 1 \cdot 41 + 0 \cdot 37, \\ 37 &= 0 \cdot 41 + 1 \cdot 37, \\ 4 &= 1 \cdot 41 - 1 \cdot 37, \\ 1 &= -9 \cdot 41 + 10 \cdot 37. \end{aligned}$$

Zadnjo enakost pomnožimo s 1490 in dobimo

$$1490 = -13410 \cdot 41 + 14900 \cdot 37.$$

Ena rešitev enačbe je torej $x_0 = -13410$, $y_0 = 14900$ in vse rešitve so oblike

$$\begin{aligned} x_k &= -13410 + 37k, \\ y_k &= 14900 - 41k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Iz pogoja $x_k \geq 0$ dobimo $k \geq 362.4$ oziroma $k \geq 363$. Iz pogoja $y_k \geq 0$ dobimo $k \leq 363.4$ oziroma $k \leq 363$. Edina nenegativna rešitev je torej pri $k = 363$. V tem primeru dobimo $x = 21$ in $y = 17$. Asistent je torej kupil 21 PNP tranzistorjev in 17 NPN tranzistorjev.

Rešitev naloge 108.

Števila, ki jih bo Janezek dobil, bodo oblike $10x+22y$ za $x,y\in\mathbb{Z}$. Ker je $\gcd(10,22)=2$, diofantska enačba

$$10x+22y=1$$

nima celoštevilskih rešitev. Enačba

$$10x+22y=8$$

oziroma

$$5x+11y=4$$

ima za eno od rešitev $x_0=-8$, $y_0=4$. Vse rešitve so torej oblike

$$\begin{aligned} x_k &= -8+11k, \\ y_k &= 4-5k, \end{aligned}$$

kjer je $k\in\mathbb{Z}$. Oglejmo si rešitve za nekaj manjših vrednosti k:

k	$\dots$	-1	0	1	2	$\dots$
x_k	$\dots$	-19	-8	3	14	$\dots$
y_k	$\dots$	9	4	-1	-6	$\dots$

Število računskih operacij, ki jih Janezek potrebuje, da pride do rezultata, je enako $|x_k|+|y_k|$. Vidimo, da se za večje ali manjše k te razlike večajo, zato je minimalno možno število operacij doseženo pri $k=1$, ko potrebuje 4 korake.

Rešitev naloge 109.

Iščemo rešitve diofantske enačbe

$$35z+41y=520.$$

Eno rešitev poiščemo s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma:

$$\begin{aligned} 41 &= 1\cdot 41+0\cdot 35, \\ 35 &= 0\cdot 41+1\cdot 35, \\ 6 &= 1\cdot 41-1\cdot 35, \\ 5 &= -5\cdot 41+6\cdot 35, \\ 1 &= 6\cdot 41-7\cdot 35. \end{aligned}$$

Če zadnjo vrstico pomnožimo s 520, dobimo

$$520=3120\cdot 41-3640\cdot 35,$$

zato je ena rešitev $x_0=-3640$ in $y_0=3120$. Vse rešitve so oblike

$$\begin{aligned} x_k &= -3640+41k, \\ y_k &= 3120-35k, \end{aligned}$$

kjer je $k\in\mathbb{Z}$. Iščemo le rešitve, kjer sta x_k in y_k naravni števili, zato moramo poiskati tiste k, za katere je $x_k\geq 0$ in $y_k\geq 0$. Iz prve neenakosti dobimo $k\geq\frac{3640}{41}$ oziroma $k\geq 89$. Iz druge neenakosti dobimo $k\leq\frac{3120}{35}$ oziroma $k\leq 89$. Za $k=89$ dobimo $x=9$ in $y=5$. Janezek si je torej privoščil 9 porcij sladoleda in 5 sadnih kup. Ker pa je $9+5=14$, lahko tudi sklepamo, da si noben dan ni privoščil dveh slaščic.

Rešitev naloge 110.

Zapišemo diofantsko enačbo

$$50x + 30y = 520$$

oziroma $5x + 3y = 52$. S kratkim premislekom hitro najdemo eno rešitev: $x_0 = 11$, $y_0 = -1$. Vse rešitve so torej oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 11 + 3k, \\ y_k &= -1 - 5k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker iščemo le rešitve, kjer sta x_k in y_k naravni števili, vidimo, da mora biti k manjši od -1, da bo pozitiven y_k in večji od -4, da bo pozitiven x_k. Rešitve zapišemo v tabelo:

k	-1	-2	-3
x_k	8	5	2
y_k	4	9	14

Število ljudi, ki so prišli na vaje, je bilo enako $x_k + y_k$. Vidimo, da je ta vsota največja v primeru, ko je $k = -3$. Na vajah je bilo tisti dan največ $2 + 14 = 16$ študentov.

Rešitev naloge 111.

Rešiti moramo diofantsko enačbo

$$80x + 88y = 2080$$

oziroma

$$10x + 11y = 260.$$

Hitro uganemo eno rešitev: $x_0 = 26$, $y_0 = 0$. Vse rešitve so torej oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 26 + 11k, \\ y_k &= 0 - 10k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Nenegativne rešitve zapišemo v tabelo:

k	0	-1	-2
x_k	26	15	4
y_k	0	10	20

Iz konteksta lahko sklepamo, da niso kupili samo ene vrste pijače, zato rešitev pri $k = 0$ ni ustrezna. Edina rešitev, ki ustreza pogoju $x > y$ (soka je bilo več), je torej $x = 15$, $y = 10$.

Rešitev naloge 112.

a. Označimo število Centiusov z x, število Miliusov pa z y. Iz besedila razberemo, da velja zveza

$$9x + 15y = 393.$$

Ker sta x in y celi števili, smo dobili diofantsko enačbo z dvema neznankama. Obe strani enačbe lahko še delimo s 3 in dobimo

$$3x + 5y = 131.$$

Eno rešitev zlahka uganemo: $x_0 = 2$, $y_0 = 25$. Vse rešitve so potem oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 2 + 5k, \\ y_k &= 25 - 3k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ko se parameter k poveča za 1, se x_k poveča za 5 in y_k zmanjša za 3, zato so pozitivne rešitve

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	2	7	12	17	22	27	32	37	42
y_k	25	22	19	16	13	10	7	4	1

b. Iščemo minimalno vrednost vsote $x_k + y_k$ pri $k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$. Očitno je minimum dosežen pri $k = 0$, ko je $x_0 + y_0 = 27$. V skupini je torej vsaj 27 vesoljcev.

Rešitev naloge 113.

a. Ker je $\gcd(28, 30, 31) = 1$, je enačba rešljiva. Če izrazimo spremenljivko z najmanjšim koeficientom, dobimo

$$\begin{aligned} 28x &= 365 - 30y - 31z, \\ x &= 13 - y - z + \frac{1}{28} - \frac{2}{28}y - \frac{3}{28}z, \\ x &= 13 - y - z + t_1. \end{aligned}$$

Ker mora biti t_1 celo število, dobimo novo diofantsko enačbo

$$28t_1 = 1 - 2y - 3z.$$

Tokrat izrazimo

$$\begin{aligned} 2y &= 1 - 28t_1 - 3z, \\ y &= -14t_1 - z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z, \\ y &= -14t_1 - z + t_2. \end{aligned}$$

Iz zveze $2t_2 = 1 - z$ izrazimo $z = 1 - 2t_2$ in to vstavimo v izraz za y, pa dobimo

$$y = -14t_1 - z + t_2 = -14t_1 - 1 + 2t_2 + t_2 = -1 - 14t_1 + 3t_2.$$

Nazadnje še dobljena izraza za y in z vstavimo v izraz za x in dobimo

$$x = 13 - y - z + t_1 = 13 - (-1 - 14t_1 + 3t_2) - (1 - 2t_2) + t_1 = 13 + 15t_1 - t_2.$$

Rešitve so torej

$$x = 13 + 15t_1 - t_2, \;\; y = -1 - 14t_1 + 3t_2, \;\; z = 1 - 2t_2,$$

kjer sta $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ poljubna parametra.

b. Izračunamo

$$x + y + z = 13 + 15t_1 - t_2 - 1 - 14t_1 + 3t_2 + 1 - 2t_2 = t_1 + 13.$$

c. Iz pogoja $z \geq 0$ dobimo $1 \geq 2t_2$ oziroma $t_2 \leq \frac{1}{2}$. Torej je $t_2 \in \{0, -1, -2, \ldots\}$. Iz pogojev $x \geq 0$ in $y \geq 0$ dobimo neenakosti $15t_1 \geq t_2 - 13$ in $14t_1 \leq 3t_2 - 1$. Če prvo neenakost pomnožimo s 14 in drugo s 15, dobimo $210t_1 \geq 14t_2 - 182$ in $210t_1 \leq 45t_2 - 15$. Od tu sklepamo, da je

$$14t_2 - 182 \leq 45t_2 - 15$$

oziroma $t_2 \geq -5$. Pozitivne rešitve lahko torej pričakujemo kvečjemu za $t_2 \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$. Teh šest primerov lahko hitro analiziramo:

$$\begin{array}{lll}
t_2 = 0, & -182 \leq 210t_1 \leq -15, & \text{tu za } t_1 \text{ ni celoštevilskih rešitev,} \\
t_2 = -1, & -196 \leq 210t_1 \leq -60, & \text{tu za } t_1 \text{ ni celoštevilskih rešitev,} \\
t_2 = -2, & -210 \leq 210t_1 \leq -105, & t_1 = -1, \\
t_2 = -3, & -224 \leq 210t_1 \leq -150, & t_1 = -1, \\
t_2 = -4, & -238 \leq 210t_1 \leq -195, & t_1 = -1, \\
t_2 = -5, & -252 \leq 210t_1 \leq -240, & \text{tu za } t_1 \text{ ni celoštevilskih rešitev.}
\end{array}$$

Vidimo, da dobimo pozitivne rešitve pri $(t_1, t_2) \in \{(-1,-2), (-1,-3), (-1,-4)\}$. V vseh primerih je $t_1 = -1$, zato je

$$x + y + z = t_1 + 13 = 12.$$

Rešitev naloge 114.

Iz enačbe izrazimo spremenljivko, pred katero je koeficient z najmanjšo absolutno vrednostjo. Dobimo

$$\begin{aligned}
3x &= 7y + 12z - 21, \\
x &= \frac{7}{3}y + 4z - 7, \\
x &= \frac{1}{3}y + 2y + 4z - 7.
\end{aligned}$$

Ker so x, y in z cela števila, so leva stran enakosti in zadnji trije členi na desni cela števila. Torej mora biti tudi $t_1 = \frac{y}{3}$ celo število. Od tu izrazimo $y = 3t_1$. Za drugi parameter lahko vzamemo tretjo spremenljivko. Torej je $z = t_2$. Oboje vstavimo v izraz za x in dobimo

$$x = t_1 + 2(3t_1) + 4t_2 - 7 = 7t_1 + 4t_2 - 7.$$

Rešitve so torej

$$x = 7t_1 + 4t_2 - 7,\ y = 3t_1,\ z = t_2,$$

kjer sta $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ poljubni celi števili. Pozitivne bodo tiste rešitve, kjer bo veljalo $x > 0$, $y > 0$ in $z > 0$. Iz drugih dveh neenakosti sledi, da mora biti $t_1 > 0$ in $t_2 > 0$. Iz prve dobimo

$$7t_1 + 4t_2 - 7 > 0.$$

Ta pogoj je izpolnjen za vse pare pozitivnih celih števil (t_1, t_2). Rešitve so torej pozitivne za vse (t_1, t_2), za katere je $t_1 > 0$ in $t_2 > 0$ in jih je neskončno mnogo.

Rešitev naloge 115.

Označimo število pic Hamilton z x. Potem je število pic Fermat enako $2x$. Denimo še, da so naročili y pic Dirichlet in z pic Euler. Dobimo diofantsko enačbo s tremi neznankami

$$8 \cdot 2x + 9x + 6y + 7z = 209$$

oziroma

$$25x + 6y + 7z = 209.$$

Ker vemo, da so skupaj naročili 28 pic, je

$$3x + y + z = 28.$$

Od tu izrazimo z in vstavimo v zgornjo enačbo, pa dobimo diofantsko enačbo z dvema neznankama

$$4x - y = 13.$$

Eno rešitev zlahka uganemo: $x_0 = 4$, $y_0 = 3$. Vse rešitve so torej oblike

$$\begin{aligned} x_k &= 4 - k, \\ y_k &= 3 - 4k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Izrazimo še $z_k = 28 - 3x_k - y_k = 13 + 7k$. Vrednosti k, pri katerih so x_k, y_k in z_k vsi pozitivni, so $k = 0, -1, -2, -3$

k	0	−1
x_k	4	5
y_k	3	7
z_k	13	6

Ker vemo, da so naročili manj kot 6 pic Dirichlet, torej $y_k < 6$, rešitev pri $k = -1$ ni dobra. Pri $k = 0$ so naročili 8 pic Fermat, 4 pice Hamilton, 3 pice Dirichlet in 13 pic Euler. Najbolj popularna je bila torej pica Euler.

Rešitev naloge 116.

Če pomnožimo prvo enačbo s 3 in drugo z 2, dobimo

$$\begin{aligned} 33x + 27y + 24z &= 3000, \\ 12x + 16y + 24z &= 2000. \end{aligned}$$

Enačbi odštejemo in dobimo diofantsko enačbo z dvema neznankama

$$21x + 11y = 1000.$$

Zlahka uganemo eno rešitev: $x_0 = 100$, $y_0 = -100$. Rešitve so

$$\begin{aligned} x_k &= 100 + 11k, \\ y_k &= -100 - 21k, \end{aligned}$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Vstavimo v drugo enačbo in dobimo

$$600 + 66k - 800 - 168k + 12z = 1000$$

oziroma $z = 100 + \frac{17}{2}k$. Ker mora biti z celo število, mora biti k sodo. Pišimo $k = 2t$, pa dobimo cele rešitve sistema

$$\begin{aligned} x_t &= 100 + 22t, \\ y_t &= -100 - 42t, \\ z_t &= 100 + 17t, \end{aligned}$$

kjer je $t \in \mathbb{Z}$. Ker morajo biti rešitve naravna števila, moramo poiskati tiste t, za katere so izpolnjene neenakosti $x_t \geq 0$, $y_t \geq 0$ in $z_t \geq 0$. Iz prve dobimo $t \geq -\frac{50}{11}$, torej je $t \geq -4$. Iz druge dobimo $t \leq -\frac{50}{21}$, torej je $t \leq -3$. Iz tretje dobimo $t \geq -\frac{100}{17}$, torej je $t \geq -5$. Vsem trem zadoščata le $t = -4$ in $t = -3$, torej sta edini naravni rešitvi $x = 12$, $y = 68$, $z = 32$ in $x = 34$, $y = 26$, $z = 49$.

Rešitev naloge 117.

V $\mathbb{Z}_{12}$ so obrnljivi elementi

$$\{1, 5, 7, 11\}$$

in očitno je $1^{-1} = 1$, $11^{-1} = 11$, $5^{-1} = 5$ ter $7^{-1} = 7$. Drugo enačbo lahko delimo s 4 in dobimo

$$x + 2y \equiv 2 \pmod 3.$$

Izrazimo $x = 2 - 2y + 3t$, kjer sta $y, t \in \mathbb{Z}$. Vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$5(2 - 2y + 3t) + 3y \equiv 8 \pmod{12},$$

oziroma

$$7y \equiv 2 + 3t \pmod{12}.$$

Če enačbo pomnožimo s 7, smo izrazili

$$y \equiv 2 + 9t \pmod{12}$$

in nato še $x = -2 - 15t = 10 + 9t$. Rešitve v $\mathbb{Z}_{12}$ so torej oblike

$$\begin{aligned} x &= 10 + 9t, \\ y &= 2 + 9t. \end{aligned}$$

Zberemo jih v tabeli

t	0	1	2	3
x	10	7	4	1
y	2	11	8	5

Druga možnost je, da enačbi odštejemo in dobimo

$$x - 5y \equiv 0 \pmod{12},$$

oziroma

$$x \equiv 5y \pmod{12}.$$

To vstavimo v drugo enačbo, ki smo jo delili s 4,

$$x + 2y \equiv 2 \pmod{3},$$

in dobimo

$$5y + 2y \equiv 2 \pmod{3}$$

oziroma

$$y \equiv 2 \pmod{3}.$$

V $\mathbb{Z}_{12}$ je torej $y \in \{2, 5, 8, 11\}$. Za vsakega izračunamo še pripadajoči $x = 5y$ in dobimo rešitve

$$(10, 2),\ (1, 5),\ (4, 8),\ (7, 11).$$

Rešitev naloge 118.

a. Iščemo število a, za katerega bo $11a \equiv 1 \pmod{48}$, torej bo

$$11a + 48b = 1.$$

Če rešitve te diofantske enačbe ne znamo uganiti, uporabimo razširjen Evklidov algoritem:

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \cdot 48 + 0 \cdot 11, \\ 11 &= 0 \cdot 48 + 1 \cdot 11, \\ 4 &= 1 \cdot 48 - 4 \cdot 11, \\ 3 &= -2 \cdot 48 + 9 \cdot 11, \\ 1 &= 3 \cdot 48 - 13 \cdot 11. \end{aligned}$$

Vidimo, da je $a \equiv -13 \equiv 35$. Res je $11 \cdot 35 = 385 = 48 \cdot 8 + 1$. Zato je $11^{-1} = 35$.

b. Drugo enačbo pomnožimo s 35 in reduciramo, pa dobimo

$$x + 18y \equiv 9 \pmod{48}.$$

Izrazimo $x \equiv 9 - 18y$ in vstavimo v prvo enačbo:

$$8(9 - 18y) + 15y \equiv 3 \pmod{48}.$$

Torej je $15y \equiv -21 \pmod{48}$ oziroma $5y \equiv -7 \pmod{16}$. Ker v $\mathbb{Z}_{16}$ velja $-7 \equiv 25$ in je $\gcd(16,5) = 1$, dobimo $y \equiv 5 \pmod{16}$. V $\mathbb{Z}_{48}$ je torej $y \in \{5, 21, 37\}$. Ustrezni $x \equiv 9 - 18y$ so vsi enaki 15, zato so rešitve

$$(15,5),\ (15,21),\ (15,37).$$

Rešitev naloge 119. ⇧

Ker je $\gcd(4,9) = 1$, je 4 obrnljiv element v $\mathbb{Z}_9$. Hitro lahko uganemo, da je $4^{-1} = 7$, ker je $4 \cdot 7 = 28 \equiv 1 \pmod 9$. Ker je $\gcd(5,8) = 1$, je 5 obrnljiv element v $\mathbb{Z}_8$ in $5^{-1} = 5$, ker je $5 \cdot 5 = 25 \equiv 1 \pmod 9$. Prvo enačbo zato pomnožimo s 7 in drugo s 5, pa dobimo

$$\begin{aligned} x &\equiv 8 \pmod 9, \\ x &\equiv 4 \pmod 8. \end{aligned}$$

Ker je $\gcd(8,9) = 1$, lahko uporabimo Kitajski izrek o ostankih. Označimo $a_1 = 8$, $a_2 = 4$ in $n_1 = 9$, $n_2 = 8$. Rešimo diofantsko enačbo

$$9m_1 + 8m_2 = 1.$$

Ena očitna rešitev je $m_1 = 1$, $m_2 = -1$. Rešitev prvotnega sistema je

$$x = a_1 m_2 n_2 + a_2 m_1 n_1 = 8 \cdot (-1) \cdot 8 + 4 \cdot 1 \cdot 9 = -64 + 36 = -28.$$

Vse rešitve so torej $x \equiv 44 \pmod{72}$.
Nalogo lahko rešimo tudi brez uporabe formul iz Kitajskega izreka o ostankih. Po krajšanju iz prve enačbe dobimo $x = 8 + 9k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Če to vstavimo v drugo enačbo in reduciramo, dobimo

$$k \equiv 4 \pmod 8.$$

Torej je $k = 4 + 8t$, kjer je $t \in \mathbb{Z}$. Izrazimo še

$$x = 8 + 9k = 8 + 9(4 + 8t) = 44 + 72t,$$

torej je $x \equiv 44 \pmod{72}$.

Rešitev naloge 120. ⇧

a. Izračunamo

$$\varphi(39) = \varphi(3 \cdot 13) = \varphi(3) \cdot \varphi(13) = 2 \cdot 12 = 24.$$

Torej je obrnljivih ostankov 24, in sicer so to vsi, ki so tuji 3 in 13:

$$\mathbb{Z}_{39}^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38\}.$$

b. Ker je $38 \equiv -1 \pmod{39}$, je $38^{-1} = 38$. Če enačbo pomnožimo z $38 \equiv -1$ in reduciramo, torej dobimo

$$38 \cdot 38x \equiv 3 \cdot (-1) \pmod{39},$$

$$x \equiv 36 \pmod{39}.$$

Edina rešitev v $\mathcal{M}$ je torej $x = 36$.

c. Pišimo $n = p \cdot q$, kjer sta p in q različni praštevili in je $p < q$. Potem je
$$\varphi(n) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = (p-1)(q-1),$$
torej iščemo p in q, ki zadoščata enačbi
$$24 = (p-1)(q-1).$$
Število 24 lahko kot produkt dveh števil zapišemo na naslednje načine:
$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$$
Po vrsti dobimo $(p,q) \in \{(2,25), (3,13), (4,9), (5,7)\}$. Ker sta p in q praštevili, sta edini možnosti $(3,13)$ in $(5,7)$. Iz prve dobimo $n = 39$, kar ni dobra rešitev, iz druge pa $n = 35$. Res je
$$\varphi(n) = \varphi(5 \cdot 7) = \varphi(5) \cdot \varphi(7) = 4 \cdot 6 = 24 = \varphi(39).$$

Rešitev naloge 121.

Najprej si ogledamo ostanke, ki jih dajo potence števila 7 pri deljenju z 19:

k	0	1	2	3	4	…
$7^k \pmod{19}$	1	7	11	1	7	…

Vidimo, da se ponavljajo s periodo 3, zato bomo morali izračunati ostanek števila $5^{9^{10}}$ pri deljenju s 3. Ogledamo si ostanke, ki jih dajo potence števila 5 pri deljenju s 3:

k	0	1	2	3	…
$5^k \pmod 3$	1	2	1	2	…

Zanimal nas bo torej ostanek, ki ga da število 9^{10} pri deljenju z 2. Ker je vsaka potenca števila 9 očitno liho število, bo $5^{9^{10}} \equiv 2 \pmod 3$ in zato $7^{5^{9^{10}}} \equiv 11 \pmod{19}$.

Rešitev naloge 122.

a. Vrednosti funkcije φ najlažje izračunamo iz praštevilskega razcepa. Ker je 2017 praštevilo, $2018 = 2 \cdot 1009$ in $2019 = 3 \cdot 673$, je
$$\begin{aligned}\varphi(2017) &= 2016,\\ \varphi(2018) &= \varphi(2) \cdot \varphi(1009) = 1 \cdot 1008 = 1008,\\ \varphi(2019) &= \varphi(3) \cdot \varphi(673) = 2 \cdot 672 = 1344.\end{aligned}$$

b. Ker je $6057 = 3^2 \cdot 673$, je $\gcd(6057, 2018) = 1$. Iz Eulerjevega izreka
$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$
zato sledi za $a = 6057$ in $n = 2018$, da je
$$6057^{1008} \equiv 1 \pmod{2018}.$$
Torej je tudi $(6057^{1008})^2 = 6057^{2016} \equiv 1 \pmod{2018}$ in je
$$6057^{2018} \equiv 6057^{2016} \cdot 6057^2 \equiv 6057^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{2018}.$$

Rešitev naloge 123.

Ker je 313 praštevilo, je $\gcd(102, 313) = 1$ in $\varphi(313) = 312$. Iz Eulerjevega izreka
$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$
za $a = 102$ in $n = 313$ zato sledi, da je
$$102^{312} \equiv 1 \pmod{313}.$$

Zanima nas torej ostanek števila 103^{104} pri deljenju z 312. Ker je $103^2 = 10609 = 34 \cdot 312 + 1$, je

$$103^{104} \equiv (103^2)^{52} \equiv 1^{52} \equiv 1 \pmod{312}$$

in je

$$102^{103^{104}} \equiv 102^1 \equiv 102 \pmod{313}.$$

Rešitev naloge 124.

Izračunajmo najprej a. Ogledamo si ostanke, ki jih dajo potence števila 5 pri deljenju s 24:

k	0	1	2	3	…
$5^k \pmod{24}$	1	5	1	5	…

Vidimo, da se ponavljajo s periodo 2, zato moramo določiti ostanek, ki ga da število $13^{23^{2018}}$ pri deljenju z 2. Ker je to število očitno liho, je $5^{13^{23^{2018}}} \equiv 5 \pmod{24}$. Torej $a = 5$. Rešiti moramo sistem kongruenc

$$\begin{aligned} 5x + 17y &\equiv 1 \pmod{24}, \\ 6x + 10y &\equiv 2 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Prvo enačbo najprej pomnožimo s 5 in reduciramo, pa dobimo

$$x + 13y \equiv 5 \pmod{24}.$$

Od tu izrazimo $x \equiv 5 - 13y$ in to vstavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$6(5 - 13y) + 10y \equiv 2 \pmod{24}$$

oziroma

$$4y \equiv -4 \pmod{24}.$$

Enačbo delimo s 4:

$$y \equiv -1 \pmod{6}.$$

Rešitve v $\mathbb{Z}_{24}$ so torej $y \in \{5, 11, 17, 23\}$. Izračunamo še $x = 5 - 13y$ in dobimo

$$(12, 5),\ (6, 11),\ (0, 17)\ (18, 23).$$

8. Permutacije

Rešitev naloge 125.

Če enačbo $\alpha\pi^{1102} = \beta$ pomnožimo z leve z α^{-1}, dobimo

$$\pi^{1102} = \alpha^{-1}\beta.$$

Kot produkt disjunktnih ciklov je $\alpha = (1)(2)(3\ 7\ 9)(4\ 8)(5)(6)$. Desna stran enačbe pa je

$$\alpha^{-1}\beta = (3\ 9\ 7)(4\ 8) * (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(2\ 4\ 6\ 8) = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)(9).$$

Ciklična struktura te permutacije je torej $[2, 2, 2, 2, 1]$. Praštevilski razcep potence π je $1102 = 2 \cdot 19 \cdot 29$, s pomočjo tega bomo lahko hitreje razmislili, kaj so dopustne ciklične strukture permutacije π. Ker je π permutacija na (le) 9 elementih, je jasno, da je le prafaktor 2 relevanten. Da dobimo 4 cikle dolžine 2 pri potenciranju na potenco 2 (in 1102), rabimo v π dva cikla dolžine 4. Ciklov dolžine 2 v π ni, saj bi vsak tak razpadel na po 2 cikla dolžine 1, v π^{1102} pa imamo le en cikel dolžine 1. Edina dopustna ciklična struktura za π je torej $[4, 4, 1]$.

Poiskati moramo torej dve rešitvi s siklično strukturo $[4,4,1]$. Ker je $1102 \equiv 2 \mod 4$, je (za edino dopustno ciklično strukturo) $\pi^{1102} = \pi^2$ in naša enačba je enakovredna

$$\pi^2 = \alpha^{-1}\beta.$$

Vse rešitve te enačbe so torej oblike

$$\pi = (\_\ \_\ \_\ \_)(\_\ \_\ \_\ \_)(9).$$

Rešitve sedaj dobimo tako, da na 4 prosta mesta vsakega cikla ustrezno vstavimo elemente ciklov dolžine 2. Dva primera rešitev sta

$$\pi_1 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8) \text{ in } \pi_2 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 8\ 7\ 6).$$

Rešitev naloge 126.

a. Hiter računa da

$$\alpha = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)(10) \text{ in } \beta = (1)(2)(3\ 7\ 10\ 8\ 5)(9).$$

b. To je spet hiter račun

$$\gamma = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9) * (3\ 7\ 10\ 8\ 5) = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10).$$

Ciklična struktura γ je torej $[3,3,2,2]$, red γ je $6 = \operatorname{lcm}(3,3,2,2)$, parnost je soda.

c. Pri potenciranju na potenco 10 bo cikel dolžine k razpadel na $\gcd(10,k)$ ciklov dolžin $\frac{k}{\gcd(10,k)}$. Cikle dolžine 3 lahko torej dobimo iz ciklov dolžin 6 ali 3, cikle dolžine 2 pa iz cikla dolžine 4. Dopustni ciklični strukturi za π sta torej $[6,4]$ ter $[4,3,3]$.

d. Najprej rešitev za ciklično strukturo $[4,3,3]$. Ker je $10 \equiv 2 \mod 4$ in $10 \equiv 1 \mod 3$, sta cikla dolžine 3 v π kar enaka tistim iz γ, cikel dolžine 4 pa dobimo tako, da ustrezno prepletemo oba cikla dolžine 2 iz γ. Dobimo

$$\pi_1 = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10).$$

Še rešitev za ciklično strukturo $[6,4]$. Cikel dolžine 4 je lahko enak kot pri π_1, dejstvo $10 \equiv 4 \mod 6$ pa nam bo olajšalo sestavo cikla dolžine 6 iz obeh ciklov dolžine 3. Najprej zapišemo

$$\pi_2 = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ \_\ 7\ \_\ 6\ \_).$$

Elemente cikla $(5\ 6\ 7)$ iz permutacije $\gamma = \pi^{10}$ smo v zgornji 6-cikel razporedili tako, da je vsak naslednji element cikla $(5\ 6\ 7)$ točno 4 mesta naprej od prejšnjega elementa. Na prosta mesta sedaj na analogen način razporedimo elemente cikla $(8\ 9\ 10)$. To lahko storimo na več načinov. Ena možnost je

$$\pi_2 = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 8\ 7\ 10\ 6\ 9).$$

Rešitev naloge 127.

a. Originalno enačbo pomnožimo z α z leve strani in s π^{-1} z desne strani

$$\alpha * \alpha^{-1}\pi^4 * \pi^{-1} = \alpha * \alpha^2\pi * \pi^{-1},$$
$$\pi^3 = \alpha^3.$$

(Torej je $k = 3$ in $\beta = \alpha^3$.)

b. Najprej poračunamo α^3:

$$\alpha^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^3(7\ 8\ 9\ 10)^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 10\ 9\ 8).$$

Ciklična struktura α^3 je torej $[4,2,2,2]$, kar je tudi ciklična struktura π^3. Permutacija π ima torej (vsaj en) cikel dolžine 4, saj ta pri potenciranju na potenco

3 ne razpade. Cikle dolžine 2 pri potenciranju na potenco 3 pa lahko dobimo iz ciklov dolžine 2 ali ciklov dolžine 6 (daljših dopustnih ciklov pri permutaciji na 10 elementih ne moremo imeti). Dopustni ciklični strukturi za π sta torej

$$[6,4] \text{ ter } [4,2,2,2].$$

c. Ker je $\pi^3 = \alpha^3$ tretja potenca enačbe $\pi = \alpha$, je $\pi = \alpha$ kar ena od rešitev. Ta rešitev je tista s ciklično strukturo $[6,4]$. V rešitvi s ciklično strukturo $[4,2,2,2]$ bo cikel dolžine 4 ostal enak tistemu iz α, cikli dolžine 2 pa bodo kar tisti iz α^3 (saj je $3 \equiv 1 \mod 2$). Rešitev π s ciklično strukturo $[4,2,2,2]$ je torej

$$\pi = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 8\ 9\ 10).$$

Rešitev naloge 128.

a. Zapišimo najprej α kot produkt disjunktnih ciklov

$$\alpha = (1\ 4\ 7)(2)(3\ 6\ 9)(5)(8).$$

Ciklična struktura α je torej $[3,3,1,1,1]$. Red je enak 3 (najmanjši skupni večkratnik dolžin ciklov), α je soda permutacija (vsak cikel dolžine 3 je produkt dveh transpozicij).

b. Zapišimo najprej enačbo v bolj pregledni obliki. Po množenju s π^{-3} z leve strani in π^{-1} z desne strani dobimo

$$\pi^{-3} * \pi^2 * \pi^{-1} = \pi^{-3} * \pi^3 * \alpha * \pi * \pi^{-1} \quad \text{kar pomeni} \quad \pi^{-2} = \alpha$$

oziroma

$$\pi^2 = \alpha^{-1}.$$

Ciklična struktura $\alpha^{-1} = (1\ 7\ 4)(2)(3\ 9\ 6)(5)(8)$ je enaka kot ciklična struktura α, t.j. $[3,3,1,1,1]$.

Pri potenciranju na potenco 2 lahko cikle dolžine 3 dobimo iz ciklov dolžin 6 ali 3. Cikle dolžine 1 pa lahko dobimo iz ciklov dolžin 2 ali 1. Možne kombinacije (ki se seštejejo v 9) so

$$[6,2,1],\ [6,1,1,1],\ [3,3,2,1] \text{ in } [3,3,1,1,1].$$

c. Možne (vendar ne vse) rešitve za vsako od zgornjih cikličnih struktur so (namenoma izpuščamo cikle dožine 1):
   - za $[6,2,1]$ je rešitev $\pi = (1\ 3\ 7\ 9\ 4\ 6)(2\ 5)$,
   - za $[6,1,1,1]$ je rešitev $\pi = (1\ 3\ 7\ 9\ 4\ 6)$,
   - za $[3,3,2,1]$ je rešitev $\pi = (1\ 4\ 7)(3\ 6\ 9)(2\ 5)$,
   - za $[3,3,1,1,1]$ je rešitev $\pi = (1\ 4\ 7)(3\ 6\ 9)$.

Rešitev naloge 129.

a. Zapišimo najprej β kot produkt disjunktnih ciklov: $\beta = (1)(2\ 4\ 6)(3\ 5\ 7)$. Sedaj poračunamo

$$\begin{aligned} \alpha * \beta * \alpha^{-1} &= (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6) * (2\ 4\ 6)(3\ 5\ 7) * (1\ 7\ 5\ 3)(2\ 6\ 4) \\ &= (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)(7). \end{aligned}$$

Ciklična struktura $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$ je torej $[3,3,1]$, kar pomeni, da je njen red enak 3, parnost je soda.

b. Pri potenciranju na potenco 4 lahko cikla dolžine 3 dobimo iz ciklov dolžin 6 ali 3. Cikel dolžine 1 pa lahko dobimo le iz ciklov dolžine 1, saj bi daljši cikli pri potenciranju razpadli ne več kot en cikel dolžine 1. Imamo torej le 2 dopustni ciklični strukturi za π, to sta $[6,1]$ in $[3,3,1]$.

c. Ker je $4 \equiv 1 \mod 3$, je $\pi_1 = \alpha * \beta * \alpha^{-1} = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)(7)$ rešitev naše enačbe. To je tudi edina rešitev s ciklično strukturo $[3,3,1]$.

Pri ciklični strukturi $[6,1]$ imamo več rešitev. Iz cikla dolžine 6 moramo namreč pri potenciranju na potenco 4 dobiti $(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$. Začnimo z nastavkom

$$(1\ \_\ 5\ \_\ 3\ \_).$$

Vsak cikel dolžine 6 take oblike nam bo pri potenciranju na potenco 4 dal cikel $(1\ 3\ 5)$. Da dobimo še cikel $(2\ 4\ 6)$, moramo na prosta mesta ustrezno razporediti elemente tega cikla. V resnici je z izbiro prostega mesta za en element cikla $(2\ 4\ 6)$ položaj ostalih dveh povsem določen. Ker imamo v nastavku 3 prosta mesta, imamo torej 3 možne rešitve s ciklično strukturo $[6,1]$. Te so

$$\pi_2 = (1\ 2\ 5\ 6\ 3\ 4)\ ,\ \pi_3 = (1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6)\ \text{ in }\ \pi_4 = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)\ .$$

Rešitev naloge 130.

Permutacija π^3 ima ciklično strukturo $[4,2,2,2]$. Pri potenciranju na potenco 3 lahko cikel dolžine 4 dobimo le iz cikla dolžine 4, tri cikle dolžine 2 pa lahko dobimo iz treh ciklov dolžine 2 ali enega cikla dolžine 6. Dopustni ciklični strukture za π sta torej $[6,4]$ in $[4,2,2,2]$.

Za ciklično strukturo $[4,2,2,2]$ imamo le eno rešitev, ta je

$$\pi_1 = (1\ 2)(3\ 5)(7\ 9)(4\ 10\ 8\ 6).$$

Za ciklično strukturo $[6,4]$ pa imamo več rešitev. Iz cikla dolžine 6 bomo pri potenciranju na potenco 3 dobili 3 cikle dolžine 2. Da dobimo cikel $(1\ 2)$, mora biti naš cikel dolžine 6 oblike

$$(1\ \_\ \_\ 2\ \_\ \_).$$

Sedaj imamo 4 mesta, na katera lahko postavimo element 3 iz cikla $(3\ 5)$, nato pa še 2 mesti, na kateri lahko postavimo element 7 cikla $(7\ 9)$. Skupaj imamo torej $4 \cdot 2 = 8$ rešitev naše enačbe s ciklično strukturo $[6,4]$. Zapišimo le dve od teh rešitev

$$\pi_2 = (1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 9)(4\ 10\ 8\ 6)\ \text{ ter }\ \pi_3 = (1\ 5\ 7\ 2\ 3\ 9)(4\ 10\ 8\ 6)\ .$$

Rešitev naloge 131.

Zapišimo najprej permutacijo na desni kot produkt disjunktnih ciklov

$$\pi^{2013} = (1\ 9)(2\ 8)(3\ 7)(4\ 6)(5).$$

Permutacija π^{2013} ima torej ciklično strukturo $[2,2,2,2,1]$. Praštevilski razcep 2013 je $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ in za določanje dopustnih cikličnih struktur permutacije π bo relevanten le prafaktor 3. Pri potenciranju na potenco 2013 bomo 4 cikle dolžine 2 dobili bodisi iz 4 ciklov dolžine 2, bodisi iz enega cikla dolžine 6 in enega cikla dolžine 2. Dopustni ciklični strukturi za π sta torej $[6,2,1]$ in $[2,2,2,2,1]$.

Ker je $2013 \equiv 1 \mod 2$, je $\pi = (1\ 9)(2\ 8)(3\ 7)(4\ 6)(5)$ ena od rešitev te enačbe. To je hkrati edina rešitev s ciklično strukturo $[2,2,2,2,1]$. Utemeljiti moramo, da ima ta enačba vsaj še 4 rešitve s ciklično strukturo $[6,2,1]$. To ne bo težko. Cikel dolžine 6 v permutaciji π bo oblike

$$(a\ \_\ \_\ b\ \_\ \_),$$

kjer je $(a\ b)$ eden od ciklov dolžine 2 permutacije π^{2013}. Ker imamo tu še 4 prosta mesta, bomo res dobili vsaj še 4 različne rešitve. V primeru, da je $(a\ b) = (1\ 9)$, lahko na katerokoli od ostalih 4 mest postavimo npr. 2 iz cikla $(2\ 8)$. Enačba ima torej res vsaj pet rešitev.

Poskusimo vseeno prešteti, koliko je vseh rešitev naše enačbe. V π^{2013} imamo 4 cikle dolžine 2. En od teh bo kar cikel dolžine 2 permutacije π. Ostali so nam še trije cikli dolžine 2, ki bodo nastali po razpadu cikla dolžine 6. Kako postavimo prvega od teh je nepomembno, za drugega imamo še 4 prosta mesta, za tretjega pa še 2 prosti mesti. Vseh rešitev s ciklično strukturo $[6,2,1]$ je torej $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$.

Rešitev naloge 132.

Permutacija α je že dana kot produkt disjunktnih ciklov. Oglejmo si najprej prvo enačbo; $\pi^{13} = \alpha$. Lahko kar opazimo, da je $13 \equiv 1 \mod 2$ in zato $\alpha^1 3 = \alpha$, torej je $\pi = \alpha$ ena od rešitev te enačbe. To seveda pomeni, da je $\pi^{13} = \alpha$ rešljiva. Razmislek v smislu dopustnih cikličnih struktur tudi ni težak, $[2,2,2,2]$ je namreč edina dopustna ciklična struktura za π in, ker imamo dopustno ciklično strukturo za rešitev, imamo tudi pripadajočo rešitev enačbe.

Pri enačbi $\pi^{16} = \alpha$ pa ne gre. Najkrajši cikel, ki pri potenciranju na potenco 16 razpade na cikle dolžine 2, je cikel dolžine 32. Jasno je, da tako dolgega cikla v permutaciji na 8 elementih ni. Enačba $\pi^{16} = \alpha$ torej nima rešitev.

Rešitev naloge 133.

a. Zapišimo najprej α in β kot produkta diskunktnih ciklov (γ je že v taki obliki);

$$\alpha = (1\ 4\ 5)(2\ 3\ 6\ 7)(8\ 9\ 10) \quad \text{in} \quad \beta = (1\ 2\ 6\ 7\ 3)(4\ 5\ 10\ 8).$$

Vse tri so permutacije na 10 elementih. Ciklične strukture za α, β in γ so po vrsti $[4,3,3]$, $[5,4,1]$ in $[8,1,1]$. Parnosti lahko določimo iz dolžin ciklov v posamezni ciklični strukturi; za α je $(4-1)+(3-1)+(3-1) = 7$, t.j. α je liha. Podobno sta tudi β in γ lihi.

b. Enačbo najprej preoblikujemo v

$$\pi^4 = \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \gamma * \beta$$

in poračunamo

$$\beta^{-1} * \alpha^{-1} * \gamma * \beta = (1\ 4\ 8)(2\ 10\ 9)(3)(5)(6)(7).$$

Ciklična struktura za π^4 je torej $[3,3,1,1,1,1]$. Pri potenciranju na potenco 4 bomo 4 cikle dolžine 1 dobili iz enega cikla dolžine 4, dveh ciklov dolžine 2 ali iz 4 ciklov dolžine 1. Oba cikla dolžine 3 pa lahko dobimo iz enega cikla dolžine 6 ali dveh ciklov dolžine 3. Vseh kombinacij za dopustne ciklične strukture π je $2 \cdot 3 = 6$, te so

$$[6,4]\,,\ [6,2,2]\,,\ [6,1,1,1,1]\,,\ [4,3,3]\,,\ [3,3,2,2] \text{ in } [3,3,1,1,1,1].$$

c. Red permutacije z dano ciklično strukturo je enak najmanjšemu skupnemu večkratniku dolžin ciklov v tej ciklični strukturi. Za zgornjih 6 dopustnih cikličnih struktur za π po vrsti dobimo

$$12\,,\ 6\,,\ 6\,,\ 12\,,\ 6 \text{ in } 3.$$

Najvišji red je torej 12 in sicer za ciklični strukturi $[6,4]$ in $[4,3,3]$. Rešitev s ciklično strukturo $[4,3,3]$ bo lažje poiskati. Ker je $4 \equiv 1 \mod 3$, lahko kar zapišemo

$$\pi = (3\ 5\ 6\ 7)(1\ 4\ 8)(2\ 10\ 9).$$

Rešitev naloge 134.

a. Zapišimo najprej α kot produkt disjunktnih ciklov;

$$\alpha = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)(8).$$

Sedaj poračunamo

$$\alpha * \beta = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8).$$

Ciklična struktura $\alpha * \beta$ je torej $[4,4]$, red te permutacije je enak $4 = \mathrm{lcm}(4,4)$.

b. Enačbo najprej preoblikujemo v

$$\pi^6 = \alpha * \beta.$$

Permutacija π^6 ima torej ciklično strukturo $[4,4]$. Dva cikla dolžine 4 lahko pri potenciranju na potenco 6 dobimo le iz enega cikla dolžine 8. Edina dopustna ciklična struktura za π je torej $[8]$.

c. Poiskati moramo dve različni rešitvi enačbe $\pi^6 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ za edino dopustno ciklično strukturo $[8]$. Postavimo najprej elemente cikla $(1\ 2\ 3\ 4)$ na ustrezna mesta edinega 8-cikla. Delo si mogoče nekoliko olajšamo, če opazimo $6 \equiv -2 \mod 8$. Vsak naslednji element cikla $(1\ 2\ 3\ 4)$ bomo torej v 8-cikel postavili za dve mesti 'nazaj'. Dobimo

$$\pi = (1\ \_\ 4\ \_\ 3\ \_\ 2\ \_).$$

Na preostala 4 prosta mesta sedaj ustrezno razporedimo elemente cikla $(5\ 6\ 7\ 8)$ in sicer po enakem kopitu. Imamo 4 možnosti, dve od teh sta

$$\pi_1 = (1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 7\ 2\ 6) \text{ in } \pi_2 = (1\ 6\ 4\ 5\ 3\ 8\ 2\ 7).$$

Rešitev naloge 135.

a. Permutacija β je že dana kot produkt disjunktnih ciklov, za α pa poračunamo

$$\alpha = (1)(2\ 4)(3)(5)(6\ 7\ 8).$$

Za določitev cikličnih struktur permutacij α^2 in β^2 samih permutacij ne bomo potrebovali. Permutaciji $\alpha * \beta$ in $\alpha * \beta * \alpha$ pa moramo kljub temu izračunati;

$$\alpha * \beta = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)\ ,\ \ \alpha * \beta * \alpha = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 7\ 6\ 8).$$

Ciklične strukture in red posameznih permutacij strnemo v spodnjo tabelo.

perm.	α	β	α^2	β^2	$\alpha * \beta$	$\alpha * \beta * \alpha$
cik. str.	$[3,2,1,1,1]$	$[2,2,2,1,1]$	$[3,1,1,1,1,1]$	$[1,1,\ldots,1]$	$[4,4]$	$[4,2,2]$
red	6	2	3	1	4	4

b. Permutacija $\pi^2 = \alpha * \beta$ ima ciklično strukturo $[4,4]$, edina dopustna ciklična struktura za π je torej $[8]$. (Le cikel dolžine 8 bo po potenciranju na potenco 2 razpadel na 2 cikla dolžine 4.) S to ciklično strukturo pa dobimo več rešitev. Elemente enega cikla dolžine 4 iz π^2 lahko v π razporedimo tako

$$\pi = (1\ \_\ 2\ \_\ 3\ \_\ 4\ \_).$$

Prvi element drugega cikla dolžine 4 lahko sedaj postavimo na katerokoli od 4 prostih mest (položaj ostalih elementov je potem povsem določen). Imamo torej 4 rešitve enačbe $\pi^2 = \alpha * \beta$.

Pri drugi enačbi ima $\pi^2 = \alpha * \beta * \alpha$ ciklično strukturo $[4,2,2]$. Pri potenciranju permutacije na potenco 2 pa nikakor ne moremo dobiti enega samega cikla dolžine 4 – pri potenciranju na potenco k bomo dobili en sam cikel dolžine d le v primeru, da je $\mathrm{lcm}(k,d) = 1$. Števili 2 in 4 pa jasno nista tuji. Ta enačba torej nima rešitev.

Rešitev naloge 136.

a. Kot produkt disjunktnik ciklov je
$$\alpha = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)(7\ 8).$$
Ciklična struktura α je torej $[2,2,2,2]$, α je soda.

b. Pri potenciranju na potenco 3 bomo 2-cikle dobili iz ciklov dolžin 2 ali 6. Dopustni ciklični strukturi za π, ki je permutacija na 8 elementih, bosta torej $[6,2]$ in $[2,2,2,2]$.

c. Ker je $3 \equiv 1 \mod 2$, je $\pi_1 = \alpha$ kar ena od rešitev za ciklično strukturo $[2,2,2,2]$. (To je tudi edina rešitev za to ciklično strukturo.) Pri ciklični strukturi $[6,2]$ bo 2-cikel π kar eden od 2-ciklov permutacije α, recimo $(1\ 6)$. Za 6-cikel imamo več možnosti. Začnimo z
$$(2\ \_\ \_\ 4\ \_\ \_).$$
Tu smo elemente 2-cikla $(2\ 4)$ iz α v 6-cikel razporedili tako, da bo potenca 3 tega 6-cikla dala (med drugim) cikel $(2\ 4)$. Na 4 prosta mesta sedaj ustrezno razporedimo elemente ciklov $(3\ 5)$ in $(7\ 8)$. Ena od 8 možnosti je
$$\pi_2 = (1\ 6)(2\ 3\ 7\ 4\ 5\ 8).$$

Rešitev naloge 137.

a. Ko enačbo $\pi * \alpha * \pi = \alpha$ pomnožimo z α z leve oziroma z desne strani, dobimo enačbi
$$\alpha * \pi * \alpha * \pi = \alpha^2 \text{ in } \pi * \alpha * \pi * \alpha = \alpha^2.$$
Ti enačbi se, ko upoštevamo $\alpha^2 = \mathrm{id}$, poenostavita v
$$(\alpha * \pi)^2 = \mathrm{id} \text{ in } (\pi * \alpha)^2 = \mathrm{id},$$
kar ravno pomeni, da je red permutacij $\alpha * \pi$ in $\pi * \alpha$ največ 2.

b. Ker je red vsake od teh treh permutacij največ 2, imajo te permutacije v zapisu z disjunktnimi cikli le 2-cikle in 1-cikle. Vse dopustne ciklične strukture so torej: $[2,2,2,2]$, $[2,2,2,1,1]$, $[2,2,1,1,1,1]$, $[2,1,1,1,1,1,1]$ in $[1,1,1,1,1,1,1,1]$.

c. Dana permutacija α ima red 2. Tako je jasno, da sta $\pi_1 = \mathrm{id}$ in $\pi_2 = \alpha$ rešitvi te enačbe. To sta rešitvi z redom 1 in 2.

Da poiščemo rešitev višjega reda, moramo imeti v π cikel dolžine 3 ali več. Spomnimo se, da je
$$(\alpha * \pi)^2 = \mathrm{id}.$$
Izberimo permutacijo reda 2, ki ni α, $(1\ 2)$ bo že v redu, in rešimo enačbo
$$\alpha * \pi = (1\ 2).$$
Upoštevamo $\alpha^{-1} = \alpha$ (saj je α reda 2) in dobimo
$$\pi = \alpha * (1\ 2) \quad \text{kar pomeni} \quad \pi_3 = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 6)(4\ 5).$$
To je sedaj rešitev enačbe $\pi * \alpha * \pi = \alpha$, ki je reda 4.

Rešitev naloge 138.

a. Če enačbo $\pi^{10} = \pi$ pomnožimo s π^{-1} (s katerekoli strani) dobimo $\pi^9 = \mathrm{id}$ oziroma
$$\pi^9 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10).$$
To pomeni, da morajo vsi cikli permutacije π pri potenciranju na potenco 9 razpasti na same cikle dolžine 1. Permutacija π ima lahko torej v zapisu z disjunktnimi cikli le cikle dolžin 9, 3 ali 1.

b. Ker je π permutacija na 10 elementih, se morajo dolžine ciklov, ki nastopajo v π, sešteti v 10. Ker lahko izbiramo le med števili 9, 3 ali 1, bo v tej vsoti vsaj ena enica. In ta 1-cikel predstavlja eno fiksno točko.
c. Najmanjše število fiksnih točk pomeni najmanjše število enic v dopustni ciklični strukturi za π. Taki sta ciklični strukturi $[9,1]$ in $[3,3,3,1]$. Kako v pripadajoče cikle razporedimo elemente od 1 do 10, pa je popolnoma vseeno. (Vsi cikli bodo namreč razpadli na same cikle dilžine 1.) En primer je kar

$$\pi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)(10).$$

Rešitev naloge 139.

a. Zapišimo te permutacije kar kot produkte disjunktnih ciklov:

$$\begin{aligned}\pi_4 &= (1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4) = (1\ 2)(3\ 4),\\ \pi_5 &= (1\ 2\ 5)(1\ 3\ 5)(1\ 4\ 5) = (1\ 2\ 4\ 5\ 3),\\ \pi_6 &= (1\ 2\ 6)(1\ 3\ 6)(1\ 4\ 6)(1\ 5\ 6) = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6).\end{aligned}$$

b. Za $\pi_n(1)$ in $\pi_n(n)$ moramo le slediti ustreznim elementom v zapisu za π_n od leve proti desni. Dobimo

$$\pi_n(1) = 2 \ \text{ in } \ \pi_n(n) = 3.$$

Za $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$ si pomagajmo s tem zapisom

$$\pi_n^{-1} = (n \quad n-1 \quad 1)(n \quad n-2 \quad 1)\cdots(n \quad 3 \quad 1)(n \quad 2 \quad 1).$$

Na enak način kot prej dobimo

$$\pi_n^{-1}(1) = n-2 \ \text{ in } \ \pi_n^{-1}(n) = n-1.$$

c. S parnostjo ne bo težav. Permutacija π_n je dana kot produkt 3-ciklov. Vsak cikel dolžine 3 je soda permutacija, zato je tudi vsaka π_n soda, saj je produkt sodih permutacij spet soda permutacija.

S ciklično strukturo bo nekaj več dela. Glede na a. del naloge zgleda, da moramo ločiti primere s sodimi oziroma lihimi indeksi. Res, zapis za π_{2k} z disjunktnimi cikli je

$$\pi_{2k} = (1 \quad 2 \quad 4 \quad \ldots \quad 2k-2)(3 \quad 5 \quad \ldots \quad 2k-3 \quad 2k-1 \quad 2k).$$

To sta dva cikla dolžine k in ciklična struktura π_{2k} je $[k,k]$. Zapis za π_{2k+1} z disjunktnimi cikli pa je

$$\pi_{2k+1} = (1 \quad 2 \quad 4 \quad \ldots \quad 2k \quad 2k+1 \quad 2k-1 \quad 2k-3 \quad \ldots \quad 3),$$

kar je en cikel dolžine $2k+1$. Ciklična struktura π_{2k+1} je torej $[2k+1]$.

Rešitev naloge 140.

a. Sicer bi lahko to dejstvo preverili za konkretni permutaciji α in β, ampak velja v splošnem. Označimo $\gamma = \alpha * \beta * \alpha^{-1}$. Tedaj iz $\beta(i) = j$ sledi

$$\gamma(\alpha^{-1}(i)) = (\alpha^{-1} * \gamma)(i) = (\alpha^{-1} * \alpha * \beta * \alpha^{-1})(i) = \alpha^{-1}(\beta(i)) = \alpha^{-1}(j).$$

To pomeni, da v zapisu z disjunktnimi cikli permutacije β element i zamenjamo z elementom $\alpha^{-1}(i)$ in dobimo zapis z disjunktnimi cikli za permutacijo $\gamma = \alpha * \beta * \alpha^{-1}$.

Uporabimo te ugotovitve in zapišimo $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$ kot produkt disjunktnih ciklov tako, da vsak element cikla v β zamenjamo z elementom, ki ga preberemo iz tabelice za α^{-1} (oziroma kar za α):

$$\alpha * \beta * \alpha^{-1} = (7\ 3\ 1\ 9\ 8\ 2)(4\ 6\ 5).$$

b. To gre z direktnim računom

$$(\alpha * \beta * \alpha^{-1})^2 = \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \alpha * \beta * \alpha^{-1} = \alpha * \beta * \mathsf{id} * \beta * \alpha^{-1} = \alpha * \beta^2 * \alpha^{-1}.$$

c. Argument iz a. dela naloge pove (s permutacijo β^k na mestu permutacije β), da sta ciklični strukturi $\alpha * \beta^k * \alpha^{-1}$ in β^k enaki. Ker je red permutacije β enak 6, bodo imele potence permutacije β največ 6 različnih cikličnih struktur. Sedaj jih ni težko poiskati, po vrsti za potence $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ so:

$$[6,3], [3,3,3], [2,2,2,1,1,1], [3,3,3], [6,3], [1,1,1,1,1,1,1,1,1].$$

Imamo torej 4 različne ciklične strukture za permutacije $\alpha * \beta^k * \alpha^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Rešitev naloge 141.

a. Poračunamo

$$\alpha = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9).$$

Ciklična struktura α je torej $[5,2,2]$, red je enak $10 = \mathrm{lcm}(5,2,2)$, α je soda.

b. Ciklična struktura $\pi^{22} = \alpha$ je $[5,2,2]$. En sam cikel dolžine 5 bomo pri potenciranju na potenco 22 lahko dobili le iz cikla dolžine 5 (saj sta 22 in 5 tuji). Dva cikla dolžine 2 pa bomo dobili le iz enega cikla dolžine 4. Edina dopustna ciklična struktura za π je torej $[5,4]$.

c. Poiskati moramo dve rešitvi z edino možno ciklično strukturo $[5,4]$. Ker je $22 \equiv 2 \mod 5$, bo ustrezen 5-cikel za vsako rešitev kar $(5\ 8\ 6\ 9\ 7)$. Za 4-cikel pa lahko vzamemo $(1\ 3\ 2\ 4)$ ali $(1\ 4\ 2\ 3)$, kar sta tudi edini dve možnosti. Dve rešitvi s ciklično strukturo $[5,4]$ sta torej

$$\pi_1 = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 8\ 6\ 9\ 7) \ \text{ in } \ \pi_2 = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 8\ 6\ 9\ 7).$$

Rešitev naloge 142.

Ciklična struktura $\pi^4 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7)(8)(9)(10)$ je $[3,3,1,1,1,1]$. Pri potenciranju na potenco 4 lahko dva 3-cikla dobimo iz enega 6-cikla ali dveh 3-ciklov, vse štiri 1-cikle pa iz enega 4-cikla, dveh 2-ciklov ali štirih 1-ciklov. Imamo torej $2 \cdot 3 = 6$ dopustnih cikličnih struktur za π, te so

$$[6,4]\ ,\ [6,2,2]\ ,\ [6,1,1,1,1]\ ,\ [4,3,3]\ ,\ [3,3,2,2] \ \text{ in } \ [3,3,1,1,1,1].$$

Najlažje bo poiskati rešitve, ki ne vsebujejo 6-cikla. (Ker je $4 \equiv 1 \mod 3$, bosta oba 3-cikla namreč kar enaka tistim iz π^4.) Način, kako razporedimo elemente 1-ciklov iz π^4 v ostale cikle permutacije π, pa je nepomemben. Tri različne rešitve so, recimo,

$$\pi_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)\ ,\ \ \pi_2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)(9\ 10) \ \text{ in } \ \pi_3 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6).$$

Rešitev naloge 143.

a. Poračunamo

$$\alpha = (1\ 9\ 3)(2\ 4\ 5)(6\ 8\ 7).$$

Vsak cikel dolžine 3 lahko zapišemo kot produkt dveh transpozicij, α je torej soda.

b. Ciklična struktura α je $[3,3,3]$. Pri potenciranju permutacije π (na katerokoli potenco) bomo cikle dolžine 3 dobili kvečjemu iz ciklov dolžin 3, 6 ali 9. (Daljših ciklov pri permutaciji na 9 elementih ne moremo imeti.) Ker je potenca 2021 tuja proti 3, 6 in 9, lahko ima π^{2021} ciklično strukturo $[3,3,3]$ le, če ima že π ciklično strukturo $[3,3,3]$. Da si poenostavimo iskanje rešitve, poračunamo $2021 \equiv 2 \equiv -1 \mod 3$ in lahko zapišemo

$$\pi = (1\ 3\ 9)(2\ 5\ 4)(6\ 7\ 8).$$

To je tudi edina rešitev enačbe $\pi^{2021} = \alpha$.

c. Še vedno velja ugotovitev iz prejšnje točke; v π lahko kvečjemu nastopajo cikli dolžin 3, 6 ali 9. Tokrat je $\gcd(2022,3) = 3$, $\gcd(2022,6) = 6$ in $\gcd(2022,9) = 3$, kar pomeni, da cikli dolžin 3 in 6 pri potenciranju na potenco 2022 razpadejo na same cikle dolžine 1. Cikel dolžine 9 pa razpade na 3 cikle dolžine 3. Edina dopusta ciklična struktura za π, ki reši enačbo $\pi^{2022} = \alpha$, je torej $[9]$. Ker je $2022 \equiv 6 \equiv -3 \mod 9$, bomo elemente prvega 3-cikla α v 9-cikel za π razporedili tako

$$\pi = (1\ \_\ \_\ 3\ \_\ \_\ 9\ \_\ \_).$$

Preden izpolnimo prosta mesta, preštejmo koliko rešitev ima enačba $\pi^{2022} = \alpha$. Elemente prvega 3-cikla α smo že razporedili v 9-cikel za π, saj tu preprosto nimamo izbire. (Če bi jih drugače, a vseeno ustrezno, postavili na 9 prostih mest, bi lahko s cikličnim premikom prišli do zgornje oblike.) Sedaj imamo 6 izbir za postavitev prvega elementa drugega 3-cikla, nato pa še 3 izbire za prvi element tretjega 3-cikla. Skupaj nam to da $6 \cdot 3 = 18$ različnih rešitev. Ena od teh rešitev je

$$\pi_1 = (1\ 2\ 6\ 3\ 5\ 7\ 9\ 4\ 8).$$

d. Vemo že, da ima enačba $\pi^{2021} = \alpha$ eno rešitev, enačba $\pi^{2022} = \alpha$ pa 18 rešitev. Poglejmo, koliko rešitev ima enačba $\pi^{2025} = \alpha$. V π imamo lahko le cikle dolžin 3, 6 ali 9 in velja $\gcd(2025,3) = 3$, $\gcd(2025,6) = 3$ ter $\gcd(2025,9) = 9$. Pri potenciranju na potenco 2025 bosta torej cikla dolžin 3 ali 9 razpadla na same cikle dolžine 1, cikel dolžine 6 pa bo razpadel na cikle dolžine $\frac{6}{3} = 2$. To pomeni, da nikakor ne moremo dobiti 3-ciklov iz α, in enačba $\pi^{2025} = \alpha$ nima rešitev. Največ rešitev, t.j. 18, ima torej enačba $\pi^{2022} = \alpha$.

Rešitev naloge 144.

a. Poračunamo $\alpha = (1\ 2\ 7)(3\ 8\ 6\ 4)(5)$.

b. Permutacija α ima ciklično strukturo $[4,3,1]$, red je enak $12 = \operatorname{lcm}(4,3,1)$, α je liha. Permutacija $\beta = (1\ 3\ 5\ 6)(2\ 8\ 7)(4)$ ima enako ciklično strukturo kot α, torej tudi enak red in parnost.

c. Enačbo najprej pomnožimo z α^{-1} z leve strani in dobimo

$$\alpha^{-1} * \alpha\pi^{202} = \alpha^{-1} * \beta \quad \text{kar pomeni} \quad \pi^{202} = \alpha^{-1} * \beta.$$

Poračunamo

$$\alpha^{-1} * \beta = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8).$$

Permutacija π^{202} ima torej ciklično strukturo $[4,4]$. Pri potenciranju na potenco $202 = 2 \cdot 101$ bomo lahko ta dva 4-cikla dobili le iz enega cikla dolžine 8. Edina dopustna ciklična struktura za π je torej $[8]$. Pomagajmo si z dejstvom $202 \equiv 2 \mod 8$. Vsaka rešitev $\pi^{202} = \alpha^{-1} * \beta$ bo oblike

$$\pi = (1\ \_\ 2\ \_\ 3\ \_\ 4\ \_).$$

Na ta 4 prosta mesta lahko poljubno postavimo začetek cikla (5 6 7 8). Dve od štirih možnosti sta

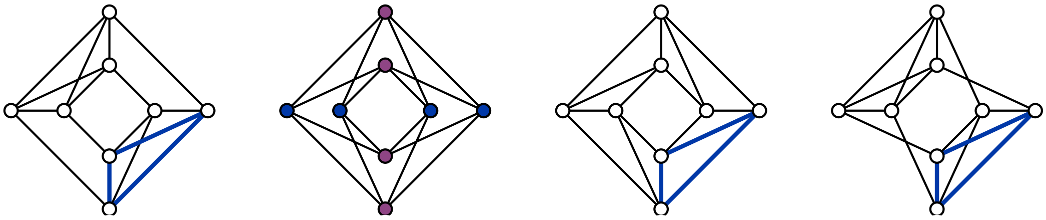
$$\pi_1 = (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4\ 8) \ \text{ in } \ \pi_2 = (1\ 6\ 2\ 7\ 3\ 8\ 4\ 5).$$

9. Grafi

Rešitev naloge 145.

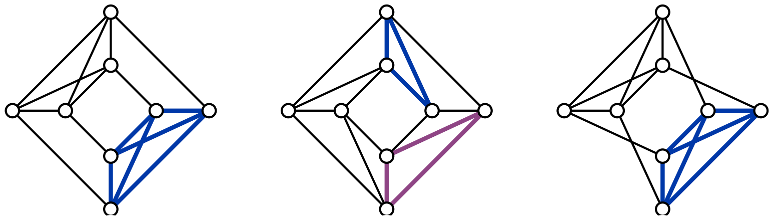
a. V vseh štirih grafih so vsa vozlišča sode stopnje, torej so vsi štirje grafi Eulerjevi.

b. Grafi G_1, G_3 in G_4 vsi vsebujejo cikle dolžine 3 in brez težav lahko v vsakem najdemo en primer takega cikla. Graf G_2 lahko pobarvamo z dvema barvama ($\chi(G_2) = 2$), torej je dvodelen. To pomeni, da ne vsebuje lihih ciklov, zato tudi ne vsebuje ciklov dolžine 3.



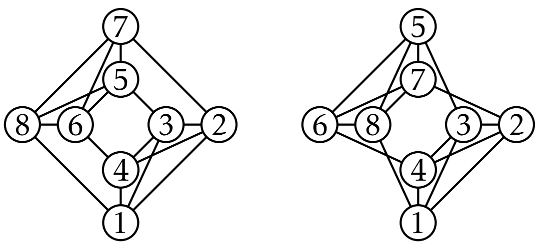
G_1 G_2 G_3 G_4

c. V grafih G_1 in G_4 brez težav najdemo podgraf, izomorfen K_4. Graf G_2 takega podgrafa ne vsebuje, ker bi v tem primeru za njegovo kromatično število veljalo $\chi(G_2) \geq 4$, videli pa smo že, da je $\chi(G_2) = 2$. Tudi graf G_3 ne vsebuje podgrafa, izomorfnega K_4. Če bi ga vseboval, potem bi v G_3 imeli 3-cikel (torej K_3) z lastnostjo, da obstaja četrto vozlišče, povezano z vsemi tremi vozlišči 3-cikla. Zaradi simetrije si moramo ogledati le dve vrsti trikotnikov. Eni vsebujejo dve vozlišči iz zunanjega 4-cikla in eno iz notranjega, drugi pa dve iz notranjega in eno iz zunanjega. V nobenem od teh dveh primerov niso vsa tri vozlišča povezana s četrtim.



G_1 G_3 G_4

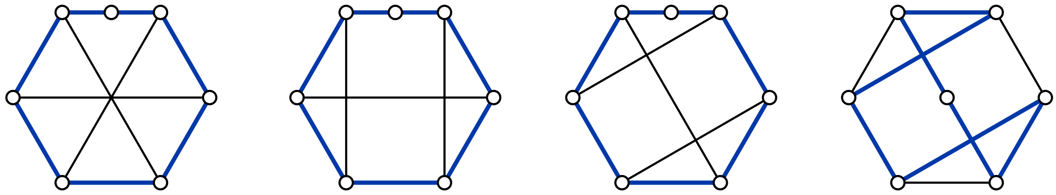
d. Graf G_2 ni izomorfen nobenemu od ostalih, ker je dvodelen, ostali trije pa niso. Prav tako G_3 ni izomorfen G_1 ali G_4, ker nima podgrafa, izomorfnega K_4. Pokažimo še, da sta G_1 in G_4 izomorfna. Če vozlišča obeh grafov oštevilčimo kot na spodnji sliki, vidimo, da je $V(G_1) = V(G_4)$ in $E(G_1) = E(G_4)$, zato sta izomorfna.



G_1 G_4

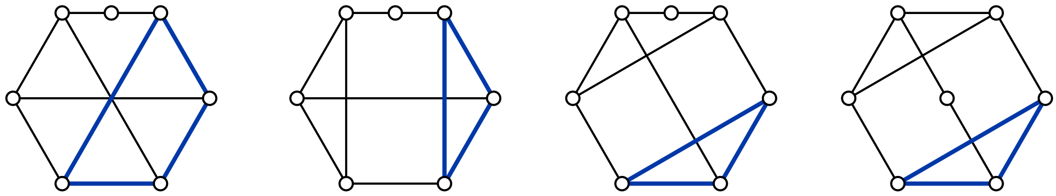
Rešitev naloge 146.

a. Vsi grafi imajo 7 vozlišč in 10 povezav.
b. Vsi štirje grafi so Hamiltonovi, zato ima v vseh štirih najdaljši cikel dolžino 7.



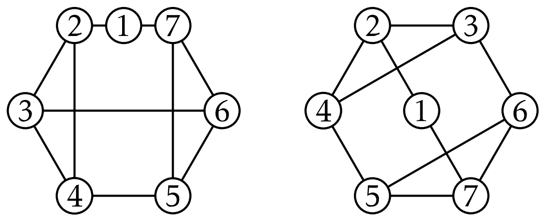
G_1 G_2 G_3 G_4

c. V grafih G_2, G_3 in G_4 je najkrajši cikel 3-cikel. V grafu G_1 je najkrajši cikel 4-cikel. Da graf G_1 ne vsebuje 3-ciklov lahko dokažemo tako, da za vseh $\binom{7}{3} = 35$ podmnožic $V(G_1)$ s tremi vozlišči pokažemo, da inducirani podgraf na teh vozliščih ni 3-cikel.



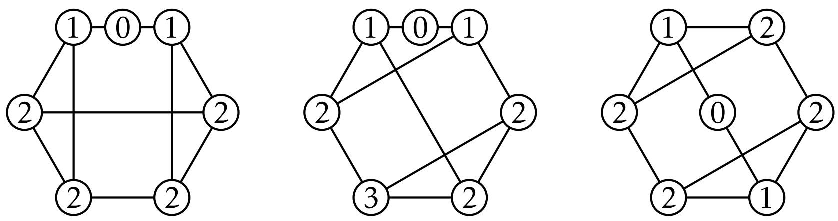
G_1 G_2 G_3 G_4

d. Graf G_1 ni izomorfen ostalim trem, ker ne vsebuje 3-ciklov. Če vozlišča grafov G_2 in G_4 oštevilčimo kot na spodnji sliki, vidimo, da je $V(G_2) = V(G_4)$ in $E(G_2) = E(G_4)$, zato sta izomorfna.



G_2 G_4

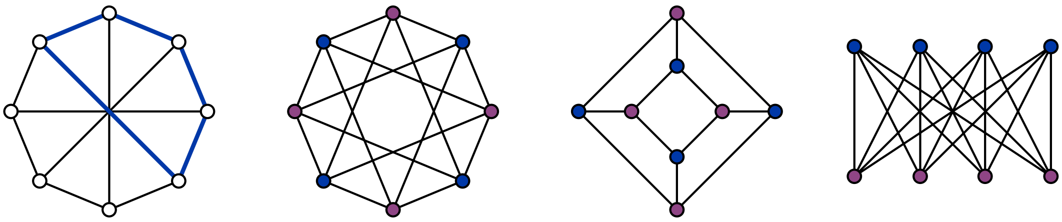
Graf G_3 ni izomorfen G_2 in G_4, ker obstaja vozlišče, ki je od vozlišča stopnje 2 oddaljeno za 3, medtem ko v grafih G_2 in G_4 takega vozlišča ni. Razdalje od vozlišča stopnje 2 so označene na spodnji sliki.



G_2 G_3 G_4

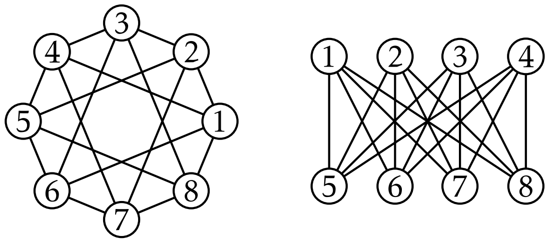
Rešitev naloge 147.

a. Grafa G_1 in G_3 imata zaporedje stopenj vozlišč $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$ (sta kubična grafa), grafa G_2 in G_4 pa $4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4$ (sta 4-regularna).
b. Graf G_1 ni dvodelen, ker vsebuje 5-cikel, za barvanje cikla lihe dolžine pa potrebujemo tri barve. Grafi G_2, G_3 in G_4 so dvodelni (barvanja z dvema barvama so na spodnji sliki).



G_1 G_2 G_3 G_4

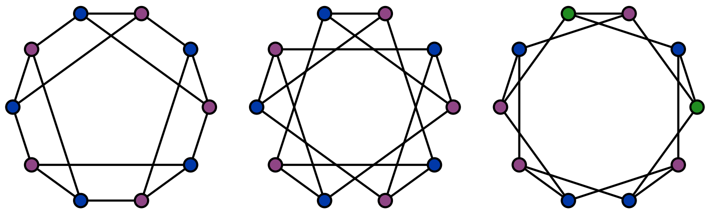
c. Grafa G_1 in G_3 nista izomorfna grafoma G_2 in G_4, ker imata različno zaporedje stopenj vozlišč. Graf G_1 tudi ni izomorfen G_3, ker ni dvodelen. Grafa G_2 in G_4 pa sta izomorfna. Izomorfizem je na spodnji sliki.



G_2 G_4

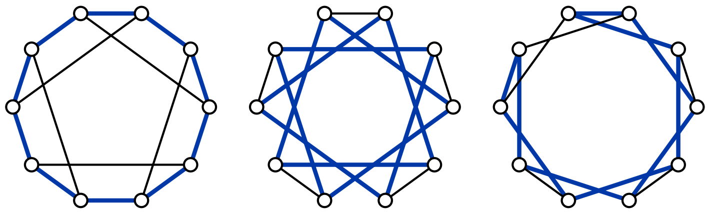
Rešitev naloge 148.

a. Graf G_3 vsebuje cikel lihe dolžine (5-cikel), zato za barvanje potrebujemo vsaj tri barve. S tremi barvami ga ni težko pobarvati, torej je $\chi(G_3) = 3$. Grafa G_1 in G_2 sta dvodelna, tj. za barvanje zadoščata dve barvi.



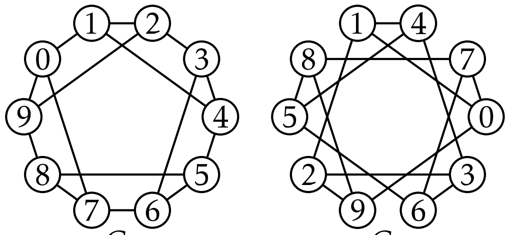
G_1 G_2 G_3

b. Vsi grafi so Hamiltonovi, ker imajo Hamiltonov cikel.



G_1 G_2 G_3

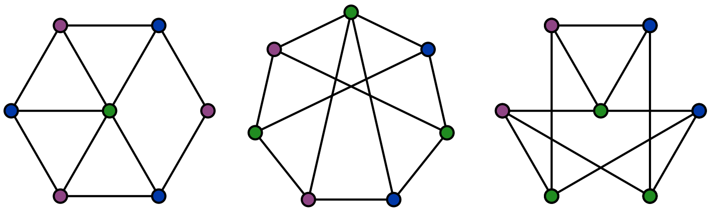
c. Graf G_3 ni izomorfen grafoma G_1 in G_2, ker ima drugačno kromatično število. Grafa G_1 in G_2 sta izomorfna. Če vozlišča oštevilčimo kot na sliki, je $V(G_1) = V(G_2)$ in $E(G_1) = E(G_2)$. Vozlišča smo oštevilčili vzdolž Hamiltonovega cikla in preverili, da se preostalih 5 povezav v obeh grafih ujema.



G_1 G_2

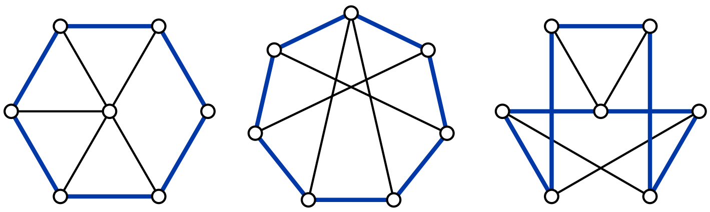
Rešitev naloge 149.

a. Vsi trije grafi vsebujejo 3-cikle, zato potrebujemo vsaj tri barve. Hitro lahko najdemo primer barvanj, ko so tri barve tudi dovolj.



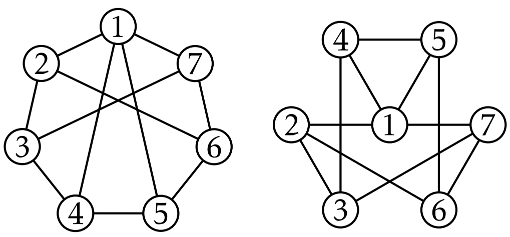
G_1 G_2 G_3

b. Vsi trije grafi so Hamiltonovi, ker imajo Hamiltonov cikel.



G_1 G_2 G_3

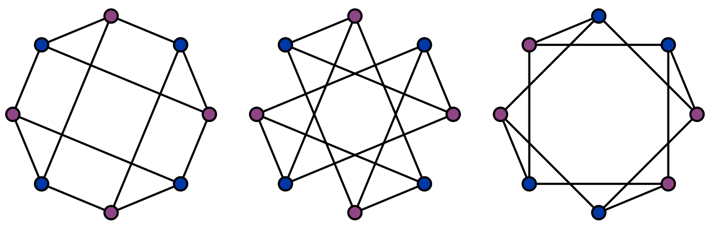
c. Graf G_1 ni izomorfen grafoma G_2 in G_3, ker ima vozlišče stopnje 5. Grafa G_2 in G_3 sta izomorfna. Če vozlišča oštevilčimo kot na sliki, je $V(G_1) = V(G_2)$ in $E(G_1) = E(G_2)$.



G_2 G_3

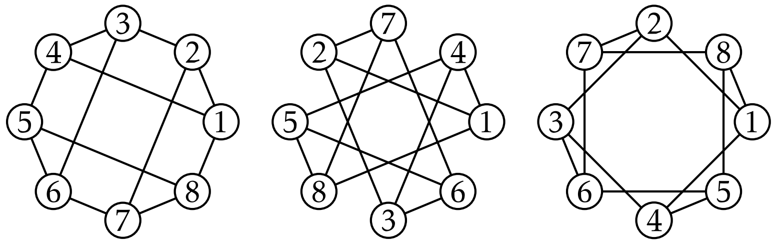
Rešitev naloge 150.

a. Vsi trije grafi imajo kromatično število 2.



G_1 G_2 G_3

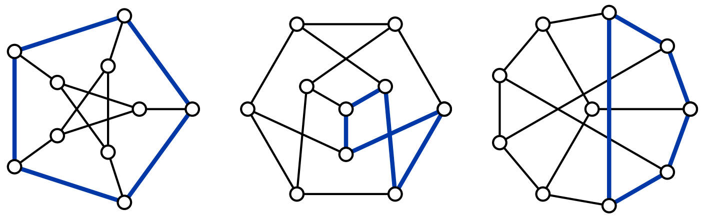
b. Vsi trije grafi so Hamiltonovi. Hamiltonovi cikli so podani s številčenjem pri naslednji točki.
c. Vsi grafi so izomorfni. Izomorfizem je podan s številčenjem na spodnji sliki. Številčenje poteka vzdolž Hamiltonovega cikla, poleg tega pa imajo grafi po štiri dodatne povezave, in sicer $\{1,4\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$ in $\{5,8\}$.



G_1 G_2 G_3

Rešitev naloge 151.

a. V vseh treh grafih imajo vsa vozlišča stopnjo 3 (grafi so kubični oziroma 3-regularni). Torej je $\Delta = \delta = 3$.
b. Z nekaj truda se lahko prepričamo, da noben od grafov ne vsebuje 3-ciklov in 4-ciklov, v vsakem pa brez težav opazimo kak 5-cikel.



G_1 G_2 G_3

c. Vsi trije grafi imajo 10 vozlišč, 15 povezav, isto zaporedje stopenj vozlišč, itd.
d. Izomorfizme podamo z oštevilčenji vozlišč, za katere velja, da je

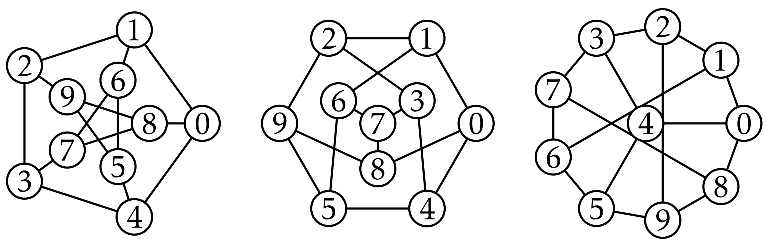
$$V(G_1) = V(G_2) = V(G_3)$$

in

$$E(G_1) = E(G_2) = E(G_3).$$

V vseh treh grafih smo oštevilčili eno Hamiltonovo pot, in sicer tako, da so bile preostale povezave

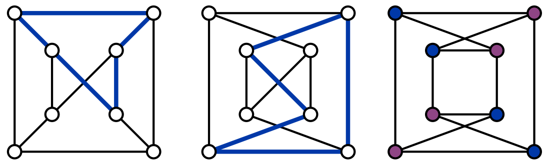
$$\{0,4\},\{0,8\},\{1,6\},\{2,9\},\{3,7\},\{5,9\}.$$



G_1 G_2 G_3

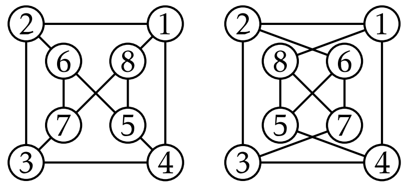
Rešitev naloge 152.

a. Vsi grafi imajo 8 vozlišč in 12 povezav. Vsi trije so 3-regularni. So povezani. Niso Eulerjevi.
b. Graf G_3 je dvodelen, ker ima barvanje z dvema barvama. Grafa G_1 in G_2 nista dvodelna, ker imata lihe cikle (5-cikle).



G_1 G_2 G_3

c. Graf G_3 ni izomorfen grafoma G_1 in G_2, ker je dvodelen. Grafa G_1 in G_2 sta izomorfna. Če vozlišča oštevilčimo vzdolž Hamiltonovih ciklov kot na sliki, je $V(G_1) = V(G_2)$ in $E(G_1) = E(G_2)$. Povezave, ki v ne ležijo na Hamiltonovem ciklu, so $\{1,4\}$, $\{2,6\}$, $\{3,7\}$, $\{5,8\}$.



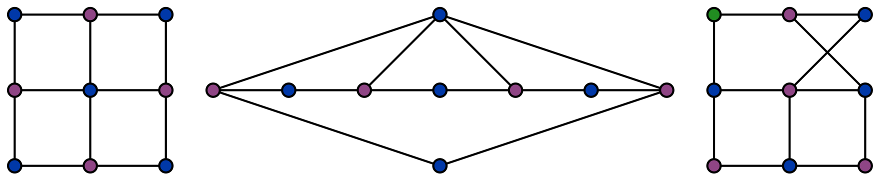
G_1 G_2

Rešitev naloge 153.

a. Vsi grafi imajo zaporedje stopenj vozlišč enako

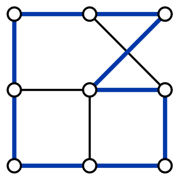
$$4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2.$$

b. Grafa G_1 in G_2 sta dvodelna, $\chi(G_1) = \chi(G_2) = 2$. Grafa G_3 ne moremo pobarvati z dvema barvama, ker vsebuje lihe cikle (5-cikel), lahko pa ga pobarvamo s tremi, zato je $\chi(G_3) = 3$.



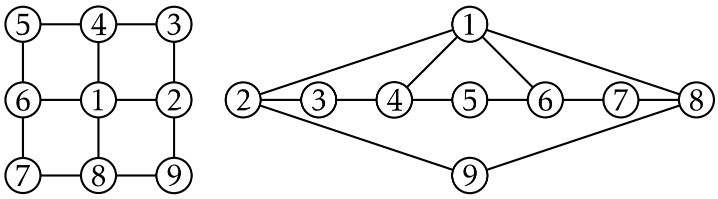
G_1 G_2 G_3

c. Graf G_1 ni Hamiltonov. Če odstranimo 4 vozlišča stopnje 3, razpade na 5 kosov. Za graf G_2 bomo v naslednji točki pokazali, da je izomorfen G_1, od koder bo sledilo, da prav tako ni Hamiltonov. V grafu G_3 brez večjih težav najdemo Hamiltonov cikel.



G_3

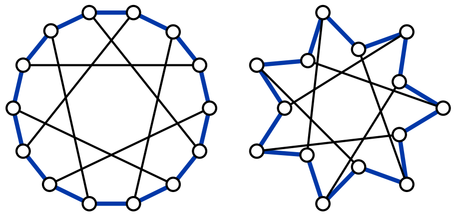
d. Grafa G_1 in G_2 sta izomorfna. Če oštevilčimo vozlišča kot na spodnji sliki, je $V(G_1) = V(G_2)$ in $E(G_1) = E(G_2)$. Številčili smo vzdolž Hamiltonove poti, preostale povezave v obeh grafih pa so $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{1,8\}$, $\{2,9\}$.



G_1 G_2

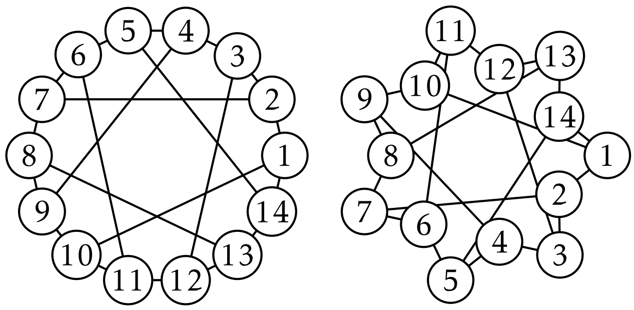
Rešitev naloge 154.

a. Oba grafa vsebujeta vozlišča lihe stopnje, zato noben od njiju ni Eulerjev.
b. V obeh grafih brez težav opazimo Hamiltonov cikel.



G_1 G_2

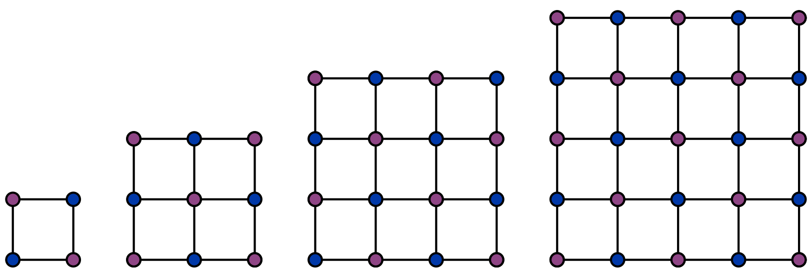
c. Grafa sta izomorfna. Če oštevilčimo vozlišča kot na spodnji sliki, je $V(G_1) = V(G_2)$ in $E(G_1) = E(G_2)$. Številčili smo vzdolž Hamiltonovih ciklov, preostale povezave v obeh grafih pa so $\{1,10\}$, $\{2,7\}$, $\{3,12\}$, $\{4,9\}$, $\{5,14\}$, $\{6,11\}$, $\{8,13\}$.



G_1 G_2

Rešitev naloge 155.

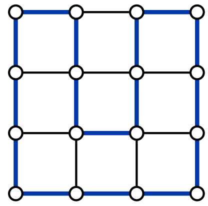
a. Graf G_2 je Eulerjev, ker so vsa vozlišča sode stopnje. Pri $n > 2$ se na stranicah pojavijo vozlišča lihe stopnje, zato grafi G_n za $n > 2$ niso Eulerjevi.
b. Grafe G_n zlahka pobarvamo z dvema barvama, zato je $\chi(G_n) = 2$ za vse $n \geq 2$. Za $n = 2, 3, 4, 5$ je barvanje prikazano na spodnji sliki.



G_2 G_3 G_4 G_5

c. Ker je $|V(G_m)| = m^2$, se grafa G_m in G_n pri $m \neq n$ razlikujeta v številu vozlišč in zato ne moreta biti izomorfna.

d. Graf G_2 je očitno Hamiltonov. Če iz grafa G_3 odstranimo vse štiri točke stopnje 3, bo graf razpadel na 5 kosov, zato po izreku o razpadu ni Hamiltonov. Pri grafu G_4 z nekaj truda spet lahko najdemo Hamiltonov cikel. Prikazan je na spodnji sliki.



G_4

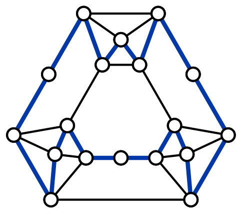
Opazimo, da podoben obhod obstaja za vse sode n. Grafi G_n so pri sodih n torej Hamiltonovi. Pri $n = 5$ opazimo, da lahko odstranimo 12 vozlišč ene barve tako, da ostane 13 nepovezanih vozlišč druge barve. Po izreku o razpadu graf G_5 torej ni Hamiltonov. Podoben trik deluje za vse lihe n. Pri pravilnem barvanju z dvema barvama pri $n = 2k+1$ namreč dobimo delitev

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k^2 + 2k) + (2k^2 + 2k + 1)$$

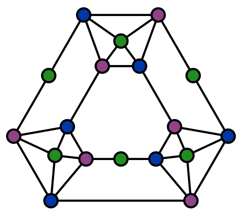
na $2k^2+2k$ točk ene barve in $2k^2+2k+1$ točk druge barve. Če odstranimo $2k^2+2k$ točk ene barve, ostane $2k^2+2k+1$ nepovezanih točk druge barve, zato po izreku o razpadu grafi G_n pri lihih n niso Hamiltonovi.

Rešitev naloge 156.

a. Ker so vsa vozlišča sodih stopenj, je graf G Eulerjev.
b. Graf je Hamiltonov. Eden od možnih Hamiltonovih ciklov je prikazan na spodnji sliki.

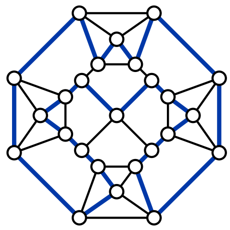


c. Ker graf G vsebuje lihe cikle, je $\chi(G) > 2$. Če podgrafe W_4 pobarvamo s tremi barvami tako, da se pri rotaciji za $\frac{2\pi}{3}$ barve ujemajo, potem preostala tri vozlišča brez težav pobarvamo z barvo, ki smo jo uporabili za središče W_4. Na ta način dobimo barvanje grafa G s tremi barvami, torej je $\chi(G) = 3$.

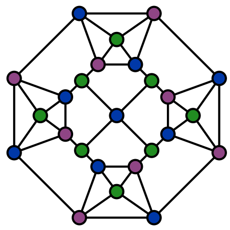


Rešitev naloge 157.

a. Graf je Eulerjev, ker so vsa vozlišča sodih stopenj.
b. Graf je Hamiltonov. Eden od možnih Hamiltonovih ciklov je prikazan na spodnji sliki.

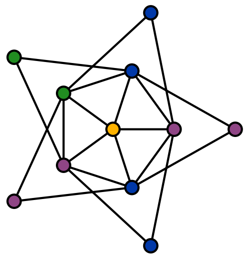


c. Ker graf vsebuje lihe cikle, je $\chi(G) > 2$. Če podgrafe W_4 pobarvamo s tremi barvami tako, da se pri rotaciji za $\frac{\pi}{2}$ barve ujemajo, potem lahko večino preostalih vozlišč brez težav pobarvamo z barvo, ki smo jo uporabili za središče W_4. Edina izjema je vozlišče na sredini, ki pa ga lahko pobarvamo s katerokoli od drugih dveh barv. Tako dobimo barvanje s tremi barvami, ki je prikazano na spodnji sliki. Sklepamo, da je $\chi(G) = 3$.



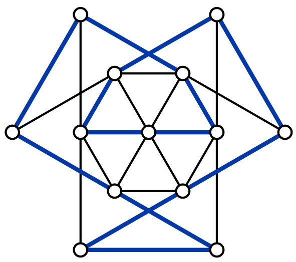
Rešitev naloge 158.

a. Ker graf G vsebuje vozlišča lihih stopenj, ni Eulerjev.
b. Če odstranimo pet vozlišč stopnje 5 (vsa razen sredinskega), razpade G na 6 kosov, zato po izreku o razpadu ni Hamiltonov.
c. Ker graf vsebuje liho kolo W_5, je $\chi(G) \geq 4$. Barvanja s štirimi barvami ni težko najti. En primer je na spodnji sliki. Sklepamo, da je $\chi(G) = 4$.

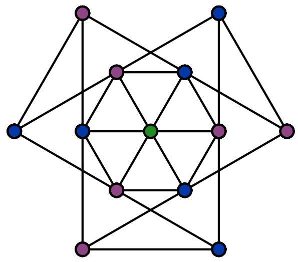


Rešitev naloge 159.

a. Graf G ni Eulerjev, ker vsebuje vozlišča lihe stopnje.
b. Graf G je Hamiltonov. Eden od možnih Hamiltonovih ciklov je označen na spodnji sliki.



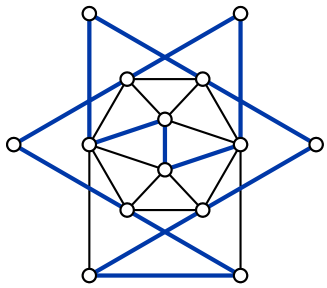
c. Ker graf G vsebuje lihe cikle, je $\chi(G) \geq 3$. S tremi barvami ga pobarvamo brez večjih težav. Eno možno barvanje je prikazano na spodnji sliki.



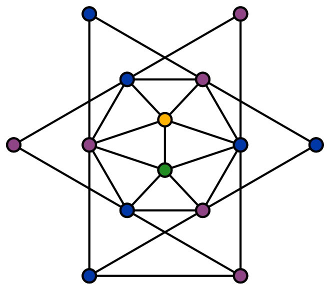
Če grafu odvzamemo vozlišče, ki je obarvano zeleno, lahko preostanek pobarvamo z dvema barvama, zato bo na ta način dobljeni graf dvodelen.

Rešitev naloge 160.

a. Graf G ni Eulerjev, ker vsebuje vozlišča lihe stopnje.
b. Graf G je Hamiltonov. Eden od možnih Hamiltonovih ciklov je označen na spodnji sliki.



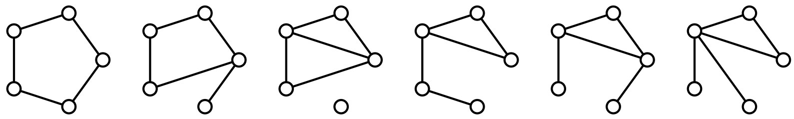
c. Ker graf G vsebuje liho kolo W_5, je $\chi(G) \geq 4$. S štirimi barvami ga pobarvamo brez večjih težav. Eno možno barvanje je prikazano na spodnji sliki.



d. Če odstranimo eno samo vozlišče, bo ostalo v grafu vsaj eno od obeh sredinskih vozlišč. Vsako od teh pa pripada petim različnim trikotnikom. Ne glede na to, katero vozlišče smo odstranili, bo nekaj od teh trikotnikov ostalo. Ker bo preostanek vseboval lihe cikle, njegovo kromatično število ne bo 2 in zato ne bo dvodelen.
e. Če grafu odvzamemo vozlišči, ki sta pobarvani z rumeno in zeleno, je preostanek pobarvan z dvema barvama, zato bo na ta način dobljeni graf dvodelen.

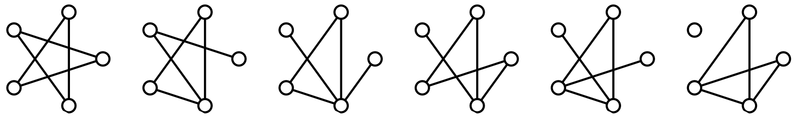
Rešitev naloge 161.

a. Denimo, da je $|V(G)| = n$ in da ima neko vozlišče grafa G stopnjo d. Potem ima to isto vozlišče v komplementarnem grafu $\overline{G}$ stopnjo $n-1-d$. V našem primeru imata vozlišči stopnje 1 v komplementu stopnjo 3, vozlišča stopnje 2 pa stopnjo 2. Zaporedje stopenj točk komplementarnega grafa je torej $2, 2, 2, 3, 3$.
b. Ker je povezav toliko kot vozlišč, bodo vsi grafi vsebovali cikle. Poiščimo jih torej glede na dolžino D maksimalnega cikla. Če je $D = 5$, imamo eno samo možnost (G_1), pri $D = 4$ dobimo dva neizomorfna grafa (G_2 in G_3), pri $D = 3$ pa tri (G_4, G_5 in G_6).



G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6

c. Ogledamo si še vse komplementarne grafe.



$\overline{G}_1$ $\overline{G}_2$ $\overline{G}_3$ $\overline{G}_4$ $\overline{G}_5$ $\overline{G}_6$

Vidimo, da je $G_1 = \overline{G}_1$, saj sta oba izomorfna ciklu na 5 vozliščih. Graf G_2 ni izomorfen $\overline{G}_2$, ker je G_2 dvodelen, $\overline{G}_2$ pa vsebuje 3-cikel. Graf G_3 ni izomorfen $\overline{G}_3$, ker ima G_3 vozlišče stopnje 0, $\overline{G}_3$ pa ne. Graf G_4 vsebuje 3-cikel, graf $\overline{G}_4$ pa je dvodelen, zato nista izomorfna. Graf G_5 je izomorfen svojemu komplementarnemu grafu. Graf G_6 je povezan, $\overline{G}_6$ pa ne, torej prav tako nista izomorfna. Edina grafa na 5 vozliščih s 5 povezavami, ki sta izomorfna svojemu komplementarnemu grafu, sta torej G_1 (5-cikel) in G_5 (3-cikel z dvema disjunktnima povezavama iz sosednjih vozlišč 3-cikla). Ustreznih izomorfizmov ni težko poiskati.

Rešitev naloge 162.

a. Ker je G Eulerjev, mora biti povezan, vsa vozlišča pa morajo imeti sodo stopnjo. Najmanjša možna stopnja vozlišča je torej 2.

b. Vsota stopenj vozlišč je enaka dvakratniku števila povezav, torej bo veljalo

$$\deg v_1 + \ldots + \deg v_9 = 24.$$

Ker je $\deg v_i \geq 2$, je

$$\deg v_1 + \ldots + \deg v_9 \geq 18,$$

in ker morajo biti vse stopnje soda števila, ni več veliko možnosti. Hitro se lahko prepričamo, da so edina možna zaporedja

$$4,4,4,2,2,2,2,2,2, \quad 6,4,2,2,2,2,2,2,2 \quad \text{in} \quad 8,2,2,2,2,2,2,2,2.$$

c. Grafe najlažje konstruiramo tako, da uporabimo postopek za konstrukcijo grafa iz zaporedja stopenj vozlišč. Oglejmo si primer, ko ima graf zaporedje

$$4,4,4,2,2,2,2,2,2.$$

V tem primeru bomo konstruirali dva neizomorfna grafa. Označimo $V(G_k) = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, $k = 1,2$. Zaporedje postopoma reduciramo in hkrati dodajamo povezave v $E(G_k)$.

a	b	c	d	e	f	g	h	i
4	4	4	2	2	2	2	2	2
–	3	3	1	1	2	2	2	2
–	–	2	1	1	1	1	2	2
–	–	–	1	1	1	1	1	1

Najprej vozlišče a povežemo z b, c, d in e (dobimo povezave ab, ac, ad in ae). S tem smo dosegli, da je $\deg a = 4$. Nato vozlišče b, ki že ima eno povezavo, povežemo še s tremi, in sicer s c, f in g (vozlišči d in e smo preskočili, ker sta imeli nižjo stopnjo kot f in g). S tem smo dodali še povezave bc, bf in be. Nazadnje še vozlišče c povežemo z h in i in torej dodamo povezavi ch in ci. Dobili smo graf z 9 povezavami in zaporedjem stopenj $4,4,4,1,1,1,1,1,1$. Šest vozlišč, ki imajo v tem trenutku stopnjo 1, razdelimo v 3 pare in dobimo še dodatne tri povezave. Lahko na primer dodamo še povezave de, fg in hi in dobimo graf G_1. Če bi namesto tega dodali povezave df, gh in ei, bi dobili neizomorfen graf G_2.

$$\begin{aligned} E(G_1) &= \{ab, ac, ad, ae, bc, bf, be, ch, ci, de, fg, hi\}, \\ E(G_2) &= \{ab, ac, ad, ae, bc, bf, be, ch, ci, df, gh, ei\}. \end{aligned}$$

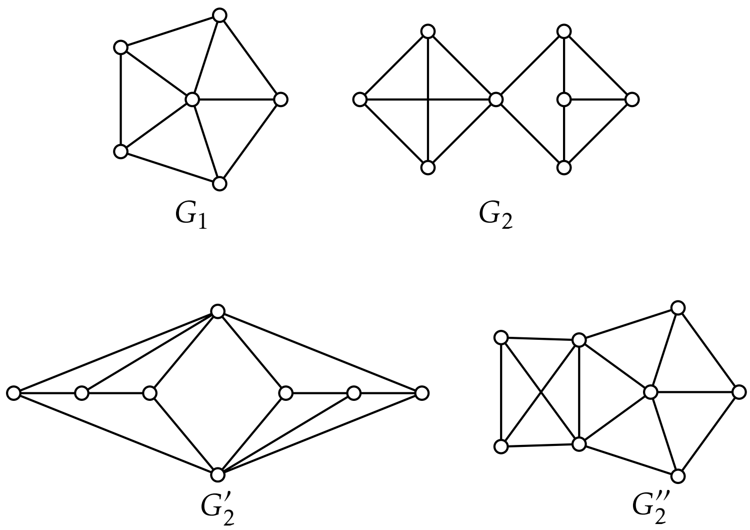
Iz preostalih dveh zaporedij lahko prav tako konstruiramo grafa (torej, zaporedji sta grafovski). Tako dobimo še dva grafa, G_3 in G_4,

$$\begin{aligned} E(G_3) &= \{ab, ac, ad, ae, af, ag, bh, bi, bc, de, fg, hi\}, \\ E(G_4) &= \{ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, bc, de, fg, hi\}, \end{aligned}$$

ki sta seveda neizomorfna prvima dvema, saj imata različno zaporedje stopenj vozlišč, iz istega razloga pa sta neizomorfna tudi drug drugemu.

Rešitev naloge 163.

a. Z nekaj poskušanja lahko hitro najdemo iskana grafa. Graf s 6 vozlišči lahko ima le eno vozlišče stopnje 5, ker ima to 5 sosed, ki morajo seveda imeti stopnjo 3. Graf z 8 vozlišči lahko ima eno, dve ali tri vozlišča stopnje 5.



b. Ker so stopnje vozlišč (3 in 5) liha števila, bi imel graf z lihim številom takih vozlišč liho vsoto stopenj vozlišč. Ampak vsota stopenj vozlišč je enaka dvakratniku števila povezav, zato je vedno sodo število. To protislovje nam pove, da so v $\mathcal{G}$ lahko samo grafi s sodim številom vozlišč. Posebej ni takega, ki bi imel 7 vozlišč.

c. Ker vozlišča stopnje 5 niso sosednja, lahko vsa pobarvamo z isto barvo. Za vsako vozlišče stopnje 3 pa velja, da smo za barvanje sosednjih vozlišč porabili največ 3 barve in je ena še gotovo prosta, zato lahko to vozlišče pobarvamo z vsaj eno od štirih barv. Če vozlišča torej uredimo tako, da stopnje vozlišč padajo, potem bomo za požrešno barvanje potrebovali največ 4 barve. Požrešni algoritem bo namreč najprej pobarval vsa vozlišča stopnje 5 z isto barvo, nato pa porabil še največ tri dodatne barve za preostala vozlišča.

d. Graf G_1, ki smo ga našli zgoraj, vsebuje cikel lihe dolžine, za katerega potrebujemo vsaj 3 barve. Ker so vsa vozlišča s cikla povezana še s središčnim vozliščem, bomo morali tega pobarvati s četrto barvo. Torej je $\chi(G_1) = 4$.

Literatura

[1] G. Fijavž, *Diskretne strukture*, Založba FRI, 2015, http://matematika.fri.uni-lj.si/ds/ds.pdf.