Rešene naloge iz kolokvijev iz Matematike 1

Peter Kink

17. februar 2021

Kazalo

1 Testi 2015/16

1.1 1.Test

1. test iz Matematike 2
26. oktober 2015

1. **[12 točk]** Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek ☐ jasno označite, če je trditev pravilna ☑ oziroma napačna ☒. Za vsak vaš pravilen odgovor boste prejeli 2 točki, za vsak napačen pa -1 točko. Če pustite kvadratek prazen, dobite 0 točk.

   Odgovorov ni potrebno utemeljevati.

   ☒ Če je U linearna lupina vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, potem vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tvorijo bazo prostora U.

   ☒ Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.

   ☑ Denimo, da je V vektorski podprostor dimenzije 16 v $\mathbb{R}^{35}$. Če je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ linearno neodvisna množica vektorjev v V, potem je $k \leq 16$.

   ☒ Za poljubne tri vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ obstaja linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ po vrsti preslika v vektorje $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$.

   ☒ Preslikava, ki obrnljivi matriki A priredi njen inverz A^{-1}, je linearna.

   ☑ Vsaka matrika, ki pripada linearni preslikavi iz $\mathbb{R}^{2\times 3}$ v $\mathbb{R}^4$, ima 6 stolpcev.

2. **[13+3 točk]** Za polinom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in kvadratno matriko A označimo $p(A) = aA^3 + bA^2 + cA + dI$. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ množica tistih polinomov stopnje največ 3, za katere je $p(A) = 0$ (ničelna matrika).

(a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$. *Natančno utemelji!*

(b) Poišči matriko, ki pripada linearni preslikavi

$$\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi(p) = p(A)$$

v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_3[x]$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. (Linearnosti preslikave ϕ ni potrebno utemeljevati.)

(c) (*Dodatno*) Poišči bazo za podprostor U in določi $\dim U$. *Natančno utemelji!*
(*Namig:* Če sta λ_1 in λ_2 lastni vrednosti A, potem je $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$.)

Rešitev:

(a) Vzemimo polinoma $p, q \in U$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ker velja $p(A) = 0$ in $q(A) = 0$, sledi

$$(\alpha p + \beta q)(A) = \alpha p(A) + \beta q(A) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

kar pomeni $\alpha p + \beta q \in U$ in U je podprostor.

(b) Poračunati moramo $\phi(p)$ za polinome p iz standardne baze $\mathbb{R}_3[x]$, $p \in \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$\phi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ \phi(x^2) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ \phi(x^3) = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}.$$

Martika, ki pripada ϕ je torej

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 1 & 1 & 5 & 13 \end{bmatrix}.$$

(c) Za karakteristični polinom $\Delta_A(x)$ matrike A velja $\Delta_A(A) = 0$ (ničelna matrika). Hitro vidimo

$$\Delta_A(x) = \det(A - xI) = x^2 - 2x - 3.$$

V U so torej lahko le tisti polinomi stopnje največ 3, ki so deljivi z $\Delta_A(x)$. Od tod dobimo $\mathcal{B}_U = \{x^2 - 2x - 3, x(x^2 - 2x - 3)\}$ in $\dim U = 2$.

1.2 2. Test

2. test iz Matematike 2
18. november 2015

1. **[12 točk]** Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek ☐ jasno označite, če je trditev pravilna ☑ oziroma napačna ☒. Za vsak vaš pravilen odgovor boste prejeli 2 točki, za vsak napačen pa -1 točko. Če pustite kvadratek prazen, dobite 0 točk.

   Odgovorov ni potrebno utemeljevati.

   ☑ Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^6$ linearna preslikava, za katero velja
   $$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right).$$
   Potem je $\dim(\operatorname{im}(\tau)) \leq 5$.

   ☒ Vsaka izometrija ohranja ničelni vektor.

   ☑ Vsaka ortogonalna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja $\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $\mathcal{A}(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$ in $\mathcal{A}(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$ za paroma ortogonalne vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, je zrcaljenje čez ravnino.

   ☑ Če za zaporedje a_n s pozitivnimi členi velja $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   ☒ Vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergira za vsak $x \in [-1, 1]$.

   ☑ Če je $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, potem obstaja tak N, da je $\left| S - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \right| < 0.001$.

2. **[13+3 točk]** Dani so vektorji $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Linearna preslikava $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ slika te tri vektorje tako:

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{w}, \ \phi(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}, \ \phi(\mathbf{w}) = -\mathbf{u}.$$

i. Izberi bazo za $\mathbb{R}^3$ in zapiši matriko, ki pripada ϕ v izbrani bazi.
ii. Koliko je $\dim(\mathrm{im}\,\phi)$?
iii. Natančno utemelji, da je ϕ linearna izometrija (ali ekvivalentno: ortogonalna transformacija).
iv. Poišči realne lastne vrednosti preslikave ϕ in pripadajoče lastne vektorje.
v. Klasificiraj linearno izometrijo ϕ.
vi. (*Dodatno*) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

Rešitev:

i. Izberimo kar bazo $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. V tej bazi pripada ϕ matrika

$$A = A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. $\dim(\mathrm{im}\,\phi) = \mathrm{rang}\, A_\phi = 3$.

iii. Baza $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ je ortogonalna, ni pa ortonormirana. V ortonormirani bazi

$$\left\{ \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

pripada ϕ ista matrika, tj. A. Ker velja $A^\mathsf{T} A = I$, je A ortogonalna, torej je ϕ linearna izometrija.

iv. Iz $\phi(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ sledi, da je $\mathbf{v}$ lastni vektor ϕ za lastno vrednost $\lambda_1 = -1$. Vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{w}$ iz ortogonalnega komplementa $\mathbf{v}$ (ki je invarinten podprostor za ϕ) pa jasno nista lastna vektorja. Torej je $\lambda_1 = -1$ edina realna lastna vrednost.

v. Ker je -1 edina realna lastna vrednost, je ϕ zrcalni zasuk. Os vrtenja je $\mathbf{v}$, kot zasuka pa $\pi/2$ (kot med $\mathbf{u}$ in $\mathbf{w}$).

1.3 3. Test

3. test iz Matematike 2
9. december 2015

1. **[12 točk]** Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek ☐ jasno označite, če je trditev pravilna ☑ oziroma napačna ☒. Za vsak vaš pravilen odgovor boste prejeli 2 točki, za vsak napačen pa -1 točko. Če pustite kvadratek prazen, dobite 0 točk.

   Odgovorov ni potrebno utemeljevati.

   ☑ Če vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergira pri $x = 3$, potem divergira tudi pri $x = -5$.

   ☑ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

   ☒ Odvod funkcije $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ je enak $f'(x) = \frac{1}{2-x}$.

   ☑ V Fourierjevem razvoju funkcije $k(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ je $a_2 = 1$ in $b_n = 0$ za vsak $n \geq 1$.

   ☒ Parcialni odvod funkcije $g(x, y) = x^3 - 3x^2 y + y$ po spremenljivki x je enak $g_x(x, y) = 3x^2 - 6xy + y$.

   ☒ Če vemo, da je $h_y(1, 0) > 0$ in $h(1, 0) = 0$, od tod sledi, da je $h(1, 1) > 0$.

2. **[13+3 točk]** Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = x\log(1+x^2).$$

(a) Poišči Taylorjevo vrsto funkcije f okrog $x_0 = 0$.
(*Namig:* Taylorjeva vrsta funkcije $\log(1+t)$ okrog $t_0 = 0$ je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n$.)

(b) Za katere $x \in \mathbb{R}$ dobljena Taylorjeva vrsta konvergira? *Natančno utemelji!*

(c) Določi $f^{(2015)}(0)$.

(d) (*Dodatno*) Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n \cdot 4^n}.$$

Rešitev:

(a) V $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n$ vstavimo $t = x^2$ in dobimo

$$\log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}.$$

Od tod sledi

$$x\log(1+x^2) = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}.$$

(b) Splošni člen Taylorjeve vrste za $x\log(1+x^2)$ je $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}$. Uporabimo najprej kvocientni test:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} x^2 = x^2.$$

Vrsta konvergira abosolutno, če je $x^2 < 1$, torej za vse $x \in (-1, 1)$.
Preverimo še konvergenco v robnih točkah $x = \pm 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\pm 1)^{2n+1} = \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Zadnja vrsta pa konvergira po Lebnizovem kriteriju. Območje konvergence je torej zaprt interval $[-1, 1]$.

(c) Iz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}$$

sledi, da za $n = \frac{2015-1}{2} = 1007$ velja

$$\frac{f^{(2015)}(0)}{2015!} = \frac{(-1)^{1007+1}}{1007},$$

torej $f^{(2015)}(0) = 2015!/1007$.

(d) Če v Taylorjevo vrsto za $x\log(1+x^2)$ vstavimo $x = 1/2$, dobimo ravno številsko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n\cdot 4^n}$. Torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n \cdot 4^n} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \log\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

1.4 4. Test

4. test iz Matematike 2
20. januar 2016

1. **[12 točk]** Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek ☐ jasno označite, če je trditev pravilna ☑ oziroma napačna ☒. Za vsak vaš pravilen odgovor boste prejeli 2 točki, za vsak napačen pa −1 točko. Če pustite kvadratek prazen, dobite 0 točk.

   Odgovorov ni potrebno utemeljevati.

   ☒ Če za zvezno pracialno odvedljivo funkcijo $f(x, y)$ velja, da je $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, je v točki (a, b) lokalni ekstrem.

   ☑ Če funkcija $f(x, y)$ doseže maksimalno vrednost na krivulji $x^2+2y^2 = 3$ v točki $(1, 1)$, potem je $\mathrm{grad}(f)(1, 1)$ vzporeden vektorju $[1, 2]^\mathsf{T}$.

   ☒ $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y)\, dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)\, dy.$

   ☑ $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos\varphi\, dr.$

   ☑ Vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y) = [2xy, x^2 - y^2]^\mathsf{T}$ je potencialno vektorsko polje na ravnini $\mathbb{R}^2$.

   ☒ $\displaystyle\int_K y\, dx + x\, dy = 3$, kjer je K pozitivno orientiran rob štirikotnika z oglišči $(0, 0), (3, 1), (4, 3)$ in $(1, 2)$.

2. **[13+5 točk]**

(a) Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = x^2 - y$ na krožnici z enačbo $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Izračunaj integral

$$\iint_D (x^2 - y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 - y)\,dx \right) dy,$$

kjer je D območje določeno z neenačbama $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.
Namig: Pomagaj si z uvedbo polarnih koordinat.

(c) (*Dodatno*) Naj bo vektorsko polje $\mathbf{F}$ dano s predpisom

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 y \\ xy \end{bmatrix}.$$

Izračunaj krivuljni integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

kjer je C pozitivno orientiran krožni lok določen z $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$.
Namig: Pomagaj si s točko (b). Uporabi Greenovo formulo. *Dobro utemelji!*

Rešitev:

(a) Iščemo ekstreme f pri pogoju (vezi) $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Zapišimo Lagrangeovo funkcijo

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 - y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ničle parcialnih odvodov te funkcije so kandidati za vezane ekstreme f:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2x\lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -1 - 2y\lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1).$$

Začnimo s prvo enačbo: Iz $2x(1-\lambda) = 0$ sledi ali $x = 0$ ali $\lambda = 1$. Ko je $x = 0$, iz tretje enačbe dobimo $y = \pm 1$. V primeru $\lambda = 1$ pa iz druge enačbe dobimo $y = -1/2$ in nato iz tretje enačbe $x = \pm\sqrt{3}/2$. Dobili smo 4 stacionarne točke, vrednost f v teh stacionarnih točkah pa je:

$T(x,y)$	$f(x,y)$
$T(0,-1)$	1
$T(0,1)$	-1
$T(-\sqrt{3}/2,-1/2)$	$5/4$
$T(\sqrt{3}/2,-1/2)$	$5/4$

Največja vrednost f na krožnici je torej $5/4$ najmanjša pa -1.

(b) Po uvedbi polarnih koordinat

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ \mathbf{Jac} &= r \end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned} I = \iint_D (x^2 - y)\,dx\,dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^1 (r^2\cos^2\phi - r\sin\phi) r\,dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^1 r^3\cos^2\phi\,dr - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^1 r^2 \sin\phi\,dr. \end{aligned}$$

Drugi integral je enak 0, saj integriramo liho funkcijo $\sin\phi$ na simetričnem intervalu. Prvi integral pa je

$$I = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

(Povprečna vrednost $\cos^2\phi$ na $[-\pi/2, \pi/2]$ je enaka $1/2$.)

(c) Krivulji C dodamo daljico S med točkama $(0,1)$ in $(0,-1)$. Tako dobimo sklenjeno, pozitivno orientirano krivuljo $C \cup S$, ki omejuje območje D. Po Greenovi formuli velja

$$\int_{C\cup S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D \left(y - x^2\right) dx\,dy = -I = -\frac{\pi}{8}.$$

Polje $\mathbf{F}$ pa je na daljici S enako $\mathbf{0}$, saj $\mathbf{F}(0,y) = [0,0]^\mathsf{T}$ zato je:

$$\int_{C\cup S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

torej $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\pi/8$.

2 Kolokviji 2016/17

2.1 1. Kolokvij

1. kolokvij iz Matematike 2
7. december 2016

1. V vektorskem prostoru polinomov stopnje največ 4, $\mathbb{R}_4[x]$, opazujemo podmnožici

$$\begin{aligned} P &= \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(-1) = p(1) \text{ in } p(0) = 0\} \\ \text{ter} \quad Q &= \{q \in \mathbb{R}_4[x] : q(1) \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

tj. v P so vsi polinomi p, za katere velja $p(-1) = p(1)$ in $p(0) = 0$, v Q pa so vsi polinomi q, ki imajo pri $x = 1$ celoštevilsko vrednost.

(a) Za vsako od podmnožic P in Q odloči ali *je* podprostor v $\mathbb{R}_4[x]$ ali *ni*. Natančno utemelji!

(b) Za tisto podmnožico, ki je podprostor, poišči še bazo in določi dimenzijo.

Rešitev: (a) Začnimo s P. Vzemimo polinoma $p, q \in P$, tj. polinoma p in q, da velja $p(1) = p(-1)$, $p(0) = 0$, $q(1) = q(-1)$ in $q(0) = 0$. Ali je P zaprta za linearne kombinacije? Preverimo; za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$(\alpha p + \beta q)(-1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = (\alpha p + \beta q)(1)$$

in

$$(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

tj. za polinom $\alpha p + \beta q$ prav tako veljata obe lastnosti za polinome iz P. Množica P je torej podprostor.

Podmnožica Q *ni* podprostor. Polinom $q(x) = x$ je vsebovan v Q (saj $q(1) = 1 \in \mathbb{Z}$), vendar $\frac{1}{2}q$ ni vsebovan v Q (saj $\frac{1}{2}q(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

(b) Naj bo $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ predpis za polinom iz $\mathbb{R}_4[x]$. Da bo ta polinom vsebovan v P, mora veljati $p(-1) = p(1)$ in $p(0) = 0$. Dobimo enačbi

$$\begin{aligned} a - b + c - d + e &= a + b + c + d + e \\ \text{in } e &= 0. \end{aligned}$$

To pa pomeni $e = 0$, $d = -b$, a, b in c pa so lahko poljubna realna števila. Polinomi $p \in P$ imajo torej predpis oblike

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx$$

za poljubne $a, b, c \in \mathbb{R}$. Od tod sledi, da je baza za P kar $\mathcal{B}_P = \{x^4, x^3 - x, x^2\}$. $\dim P = 3$.

2. Naj bo $\mathbf{a} = [1, 1]^\mathsf{T}$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je dana s predpisom

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,\mathbf{a}^\mathsf{T} = \mathbf{x}\,[1, 1].$$

(a) Utemelji, da je ϕ linearna preslikava.

(b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Določi $\dim(\ker\phi)$ in $\dim(\mathrm{im}\phi)$.

(d) Poišči bazo za $\mathrm{im}\phi$.

Rešitev: (a) Preverimo, da ϕ ohranja linearne kombinacije. Velja

$$\phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})\mathbf{a}^\mathsf{T} = \alpha\mathbf{x}\,\mathbf{a}^\mathsf{T} + \beta\mathbf{y}\,\mathbf{a}^\mathsf{T} = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \alpha\phi(\mathbf{y})$$

za vse $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ in vse $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ϕ je linearna.

(b) Poračunajmo, v kaj ϕ preslika vektorje standardne baze $\mathbb{R}^2$.

$$\phi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1,1] = \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} = E_{11}+E_{12}$$
$$\phi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[1,1] = \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix} = E_{21}+E_{22}$$

Matrika, ki pripada ϕ je torej

$$A_\phi = \begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

(c) Matrika A_ϕ ima rang 2, torej $\dim(\mathrm{im}\phi) = \dim(C(A_\phi)) = 2$. Za jedro potem velja $\dim(\ker\phi) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathrm{im}\phi) = 2-2 = 0$.

(d) Zagotovo sta v $\mathrm{im}\phi$ matriki $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ in $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$. Ker sta linearno neodvisni in je $\dim(\mathrm{im}\phi) = 2$, je baza za $\mathrm{im}\phi$ kar $\mathcal{B}_{\mathrm{im}\phi} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]\right\}$.

3. Linearna preslikava $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ poljuben vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ najprej zrcali preko ravnine $x - z = 0$, nato pa še preko ravnine $z = 0$.

(a) Utemelji, da je ψ izometrija.

(b) Poišči lastne vrednosti izometrije ψ ter tiste lastne vektorje ψ, ki pripadajo realnim lastnim vrednostim.

(c) Katera izometrija je ψ?

Rešitev: (a) Ker je ψ kompozitum dveh zrcaljenj (ki sta izometriji), je tudi ψ izometrija.

(b) Narišemo skico in vidimo, da ψ slika vektorje standardne baze $\mathbb{R}^3$ tako:

$$\psi(\mathbf{i}) = -\mathbf{k}\ ,\ \ \psi(\mathbf{j}) = \mathbf{j}\ ,\ \ \psi(\mathbf{k}) = \mathbf{i}.$$

Matrika, ki pripada ψ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$ je torej

$$A_\psi = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom te matrike je $\det(A_\psi - \lambda I) = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$. Lastne vrednosti so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ in $\lambda_3 = i$. Pri edini realni lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je lastni vektor kar $\mathbf{j}$ (od prej vemo $\psi(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$).

(c) ψ je zasuk z osjo $\mathbf{j}$ za kot $\pi/2$. (Kot med vektorjema $\mathbf{k}$ in $\psi(\mathbf{k}) = \mathbf{i}$—pomembno je, da vzamemo vektor pravokoten na os vrtenja. Lahko pa kot določimo iz polarnega zapisa $\lambda_3 = i = e^{i\,\pi/2}$. Pri obeh načinih smo površni in zanemarjamo orientacijo.)

4. Funkcija f je vsota potenčne vrste

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k\, k}.$$

(a) Na katerem intervalu v $\mathbb{R}$ ta vrsta konvergira? Posebej preveri, kako je s konvergenco v robnih točkah.

(b) Odvajaj zgornjo vrsto in eksplicitno izrazi $f'(x)$.

(c) S pomočjo (b) poišči predpis za $f(x)$.

(d) Izračunaj vsoto vrste $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k}$.

Rešitev: (a) Iz kvocientnega kriterija za vrsto s členi $a_k = \frac{x^{3k}}{3^k\, k}$ dobimo

$$q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{kx^3}{3(k+1)} \right| = \left| \frac{x^3}{3} \right|,$$

neenačbo $q < 1$ oziroma $|x^3/3| < 1$ rešijo vsi $x \in (-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$. V robni točki $x = -\sqrt[3]{3}$ dobimo vrsto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

ki konvergira po Leibnizovem kriteriju. V robni točki $x = \sqrt[3]{3}$ pa dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

ki divergira. Območje konvergence je torej $[-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$.

(b) Vrsto za f odvajamo po členih in seštejemo dobljeno geometrijsko vrsto:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3kx^{3k-1}}{3^k\, k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k-1}}{3^{k-1}} = \frac{3}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^3)^k}{3^k} = \frac{3}{x} \cdot \frac{x^3/3}{1 - x^3/3} = \frac{3x^2}{3 - x^3}.$$

(c) Integriramo $f'(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \frac{3x^2}{3 - x^3}\, dx = -\log(3 - x^3) + C,$$

kjer zadnji integral uženemo z uvedbo nove spremenljivke $t = 3 - x^3$. Da določimo C, vstavimo $x = 0$:

$$0 = -\log 3 + C,$$

kar pomeni, da je $C = \log 3$. Vsota vrste za f je tako

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k\, k} = \log 3 - \log(3 - x^3) = \log\left(\frac{3}{3 - x^3}\right).$$

(d) Vsota te vrste je ravno $f(1)$. Imamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k} = f(1) = \log\left(\frac{3}{2}\right).$$

2.2 2. Kolokvij

2. kolokvij iz Matematike 2
18. januar 2017

1. Funkcija dveh spremenljivk f ima predpis

$$f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

   (a) Poišči enačbo tangentne ravnine na graf f skozi točko $A(1, -1, -1)$.

   (b) Poišči stacionarne točke funkcije f.

   (c) V katerih stacionarnih točkah ima f lokalni ekstrem? Katerega tipa?

Rešitev: (a) Graf funkcije f ima enačbo $z = f(x, y)$ oziroma $x^3+x^2+y^2+4xy-z = 0$. Graf f gledamo kot nivojno ploskev funkcije treh spremenljivk $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradient g kaže v smeri, ki je na to nivojno ploskev pravokotna. Ker je

$$\operatorname{grad} g = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + 2x + 4y \\ 2y + 4x \\ -1 \end{bmatrix},$$

lahko za normalni vektor tangentne ravnine vzamemo $\mathbf{n} = (\operatorname{grad} g)(1, -1, -1) = [1, 2, -1]^\mathsf{T}$. Enačba tangentne ravnine skozi A je torej $x + 2y - z = 0$.
(b) Stacionarne točke so rešitve sistema

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 2x + 4y = 0, \\ f_y(x, y) &= 2y + 4x = 0. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $y = -2x$ in, ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo še $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Stacionarni točki sta torej $T_1(0, 0)$ in $T_2(2, -4)$.
(c) Poskusimo tip stacionarne točke določiti s pomočjo Hessejeve matrike f:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x + 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

V T_1 dobimo $H_f(0, 0) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, torej $T_1(0, 0)$ ni ekstrem, saj sta lastni vrednosti $H_f(0, 0)$ različno predznačeni. V T_2 dobimo $H_f(2, -4) = \left[\begin{smallmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, torej je $T_2(2, -4)$ lokalni minimum, saj sta lastni vrednosti $H_f(2, -4)$ strogo pozitivni.

2. Znotraj elipsoida z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

želimo sestaviti žično ogrodje kvadra, katerega robovi so vzporedni koordinatnim osem. Za kateri včrtan kvader bomo porabili največ žice? Kolikšna bo največja dolžina žice, ki jo bomo porabili?
(Če ne gre v splošnem, reši nalogo za elipsoid s polosmi $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$.)
Rešitev: Oglišča tega kvadra bodo v točkah s koordinatami $(\pm x, \pm y, \pm z)$. Dolžine stranic tega kvadra so torej $2x$, $2y$ in $2z$, da sestavimo ogrodje torej potrebujemo

$$f(x, y, z) = 8(x + y + z)$$

enot žice. Naša vez je

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Pripadajoča Lagrangeova funkcija je torej

$$L(x,y,z,\lambda) = 8(x+y+z) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

njene stacionarne točke pa so rešitve sistema

$$\begin{aligned} L_x &= 8 - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L_y &= 8 - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L_z &= 8 - \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \\ L_\lambda &= -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Iz prvih treh enačb sledi, da rešitve, pri katerih bi bil katerikoli x, y, z ali λ enak 0, niso dopustne. Zapišimo

$$\frac{x}{a} = \frac{4a}{\lambda}\,, \quad \frac{y}{b} = \frac{4b}{\lambda} \quad \text{in} \quad \frac{z}{c} = \frac{4c}{\lambda}.$$

Ko to vstavimo v enačbo vezi, dobimo

$$16\left(\frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{b^2}{\lambda^2} + \frac{c^2}{\lambda^2}\right) = 1$$

oziroma

$$\lambda^2 = 16(a^2+b^2+c^2).$$

Torej $\lambda = \pm 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, od koder sledi

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,, \quad y = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{in} \quad z = \pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

(Vse možne kombinacije $\pm$.) Največ žice bomo torej porabili za kvader z dolžinami stranic

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,, \quad \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{in} \quad \frac{2c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

za ta kvader bomo porabili

$$\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 8\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

enot žice.

3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ omejeno območje nad ravnino $z = 0$, ki ga dobimo, če valj $x^2 + y^2 = 1$ odrežemo s sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

   (a) Izračunaj prostornino telesa, ki ga določa območje D, tj. prostornino telesa med krogom $x^2 + y^2 \leq 1$ v xy-ravnini in grafom funkcije $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

   (b) Izračunaj še maso telesa, ki ga določa D, če je gostota v točki (x,y,z) enaka
   $$\rho(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2.$$

Namig: Nalogo se da rešiti z dvojnim integralom. Lahko pa zapišeš tudi ustrezen trojni integral v *valjnih koordinatah* $\mathbf{F}(r, \varphi, z) = [x, y, z]^\mathsf{T}$, ki so dane z

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos \varphi, \\
y &= r \sin \varphi, \\
z &= z.
\end{aligned}
$$

Determinanta Jacobijeve matrike teh koordinat je enaka $\det(J_{\mathbf{F}}) = r$. (Tega ni treba preverjati.)

Rešitev: (a) Prostornina med xy-ravnino in grafom funkcije $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ je dvojni integral

$$
\iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2}\, dx dy,
$$

kjer je D krog z neenačbo $x^2 + y^2 \leq 1$. Najlažje ga bomo izračunali v polarnih koordinatah:

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2}\, dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{2 - r^2} \cdot r\, dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{2 - r^2}\, dr \\
&= -\pi \int_2^1 \sqrt{t}\, dt = \pi \int_1^2 t^{1/2}\, dt = \frac{2\pi}{3} t^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2\pi}{3}\big(2\sqrt{2} - 1\big),
\end{aligned}
$$

kjer smo v drugi vrstici uvedli novo spremeljivko $t = 2 - r^2$.

(b) Izračunajmo pripadajoč trojni integral v cilindričnih koordinatah. Gostota je enaka $\rho(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = 1 + r^2$. Masa je torej

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{2 - r^2}} (1 + r^2) r\, dz = 2\pi \int_0^1 r(1 + r^2)\sqrt{2 - r^2}\, dr \\
&= -\pi \int_2^1 (3 - t)\sqrt{t}\, dt = \pi \int_1^2 \big(3t^{1/2} - t^{3/2}\big) dt = \frac{4\pi}{5}\big(3\sqrt{2} - 2\big),
\end{aligned}
$$

kjer smo v drugi vrstici spet uvedli novo spremeljivko $t = 2 - r^2$.

2.3 1. Popravni kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
1. februar 2017

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\phi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ pa preslikava s predpisom

$$\phi(X) = AX - X^{\mathsf{T}}A.$$

(a) Prepričaj se, da je ϕ linearna preslikava.

(b) Določi $\dim(\ker\phi)$ in $\dim(\mathrm{im}\phi)$. Poišči še bazo za $\mathrm{im}\phi$.

(c) Ali je $\lambda = 1$ lastna vrednost za ϕ? Če je, poišči pripadajoč lastni vektor.

Rešitev: (a) Preveriti moramo, da ϕ ohranja linearne kombinacije matrik. Velja

$$\begin{aligned}\phi(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)^{\mathsf{T}}A = \alpha AX + \beta AY - \alpha X^{\mathsf{T}}A - \beta Y^{\mathsf{T}}A \\ &= \alpha(AX - X^{\mathsf{T}}A) + \beta(AY - Y^{\mathsf{T}}A) = \alpha\phi(X) + \beta\phi(Y)\end{aligned}$$

za poljubni matriki $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ϕ je torej linearna.
(b) Pišimo $X = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Tedaj je

$$\phi(X) = AX - X^{\mathsf{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c & a+b-d \\ a-b-d & 2b \end{bmatrix}.$$

V $\ker\phi$ so vse matrike X, za katere je $\phi(X) = 0$ oziroma

$$\begin{bmatrix} -2c & a+b-d \\ a-b-d & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobimo $b = 0$, $c = 0$, $d = a$, a je pa lahko poljuben. Sledi

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

za $X \in \ker\phi$, kar pomeni $\dim(\ker\phi) = 1$. Iz dimenzijske enačbe sedaj dobimo

$$\dim(\mathrm{im}\phi) = \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) - \dim(\ker\phi) = 4 - 1 = 3.$$

Bazo za $\mathrm{im}\phi$ lahko dobimo tako, da v $\phi(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} -2c & a+b-d \\ a-b-d & 2b \end{smallmatrix}\right]$ vstavimo take skalarje a, b, c, d, da dobimo 3 linearno neodvisne matrike. Ena možna baza je

$$\mathcal{B}_{\mathrm{im}\phi} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Poskusimo poiskati neničelne rešitve enačbe $\phi(X) = X$. Spet zapišemo $X = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ in dobimo

$$\begin{bmatrix} -2c & a+b-d \\ a-b-d & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ta sistem pa ima rešitve oblike

$$X = \begin{bmatrix} d & d/2 \\ -d/2 & d \end{bmatrix},$$

kjer je $d \in \mathbb{R}$ poljuben. Število $\lambda = 1$ je torej res lastna vrednost ϕ, pripadajoč lastni vektor (matrika) pa je

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Funkcija g je vsota potenčne vrste

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}.$$

(a) Določi definicijsko območje funkcije g, tj. območje konvergence te vrste.

(b) Poišči (katerikoli) nedoločeni integral funkcije g.

(c) S pomočjo (b) izrazi g eksplicitno.

(d) Izračunaj vsoto vrste $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$.

Rešitev: (a) Uporabimo kvocientni kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+3)x^{2n+2}}{(2n+1)x^{2n}} \right| = x^2.$$

Ker je $x^2 \leq 1$ za $x \in (-1,1)$, je vrsta za g absolutno konvergenta za $x \in (-1,1)$. Preverimo še, kako je s konvergenco v robnih točkah: Za $x = \pm 1$ dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1),$$

ta vrsta pa ne konvergira, saj $2n+1 \not\to 0$. Definicijsko območje g je torej interval $(-1,1)$. (b) Direktno izračunamo:

$$\int g(x)\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{x}{1-x^2}.$$

(Za zadnji enačaj smo uporabili formulo za vsoto geometrijske vrste.)
(c) Funkcijo iz (b) odvajamo:

$$g(x) = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

(d) Če v potenčno vrsto iz (a) vstavimo $x = 1/\sqrt{3}$ dobimo vrsto iz (d). Torej:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} = g(1/\sqrt{3}) = 3.$$

3. Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 2z$$

na krogli z neenačbo

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2z.$$

Rešitev: Poiskati moramo kandidate za ekstreme v notranjosti in za ekstreme na robu. V notranjosti ekstremov ni, saj je $\operatorname{grad} f = [2x, 4y, -2]^\mathsf{T}$ vedno različen od $[0,0,0]^\mathsf{T}$.

Kandidate za ekstreme na robu bomo poiskali z Lagrangeovo metodo. Lagrangeeva funkcija je

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2z).$$

Njene stacionarne točke so rešitve sistema $\operatorname{grad} L = \mathbf{0}$ oziroma

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x &= 0, \\ 4y - 2\lambda y &= 0, \\ -2 - 2\lambda z + 2\lambda &= 0, \\ -(x^2 + y^2 + z^2 - 2z) &= 0. \end{aligned}$$

Z nekaj truda poiščemo vse 4 kandidate za vezane ekstreme f . . . ti so:

$T(x, y, z)$	$f(x, y, z)$
$T(0, 0, 0)$	0
$T(0, 0, 2)$	-4
$T(0, -\sqrt{3}/2, 1/2)$	$1/2$
$T(0, \sqrt{3}/2, 1/2)$	$1/2$

Največja vrednost f na krogli je torej $1/2$, najmanjša pa -4.

4. Vektorsko polje $\mathbf{F}$ ima predpis $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, xy^2 + y^3)$.

   (a) Izračunaj krivuljni integral $\int_\mathbf{K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, kjer je $\mathbf{K}$ krožni lok s parametrizacijo $\mathbf{p}(t) = [\cos t, \sin t]^\mathsf{T}$ za $t \in [0, \pi]$.

   (b) Izračunaj dvakratni integral

$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y^2)\, dy.$$

Rešitev: (a) Integral izračunamo direktno:

$$\begin{aligned} \int_\mathbf{K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)\, dt = \int_0^\pi \begin{bmatrix} \cos^2 t \sin t \\ \cos t \sin^2 t + \sin^3 t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^\pi \sin^3 t \cos t\, dt = \int_0^0 u^3\, du = 0. \end{aligned}$$

(V drugi vrstici smo uvedli novo spremenljivko $u = \sin t$.)
(b) Integrala se lahko lotimo na več načinov. Lahko bi uvedli polarne koordinate. Tu si bomo pomagali z Greenovo formulo in (a) delom naloge. Območje za integracijo D je polkrog določen z neenačbama $x^2 + y^2 \le 1$ in $y \ge 0$. Rob tega polkroga je sestavljen iz polkrožnega loka $\mathbf{K}$ (iz (a) dela) in daljice $\mathbf{L}$ od točke $(-1, 0)$ do točke $(1, 0)$. Po Greenovi formuli je

$$\int_\mathbf{K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_\mathbf{L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \Big)\, dxdy = \iint_D (x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Krivuljni integral $\int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ je lahek. Parametrizacija za daljico $\mathbf{L}$ je lahko kar $\mathbf{r}(t) = [t, 0]^\mathsf{T}$ za $t \in [-1, 1]$ in dobimo

$$\int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = 0.$$

Sledi

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y^2)\, dy = \int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 + 0 = 0.$$

2.4 2. Popravni kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
16. februar 2017

1. Naj linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ slika polinom $p(x)$ v $(x+1)p'(x)$, tj.
$$\phi(p)(x) = (x+1)p'(x).$$
   (a) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

   (b) Kateri od polinomov
$$p_1(x) = x^3 + x^2\,,\ p_2(x) = x \text{ in } p_3(x) = x^3 + 2x^2 + x$$
   so vsebovani v imϕ, sliki preslikave ϕ? *Utemelji!*

   (c) Ali je $q(x) = (x+1)^3$ lastni polinom preslikave ϕ? Kateri lastni vrednosti pripada?

Rešitev: (a) Poračunamo, kam ϕ slika standardne bazne polinome 1, x, x^2 in x^3:
$$\begin{aligned}\phi(1) &= (x+1)\cdot 0 = 0,\\ \phi(x) &= (x+1)\cdot 1 = x+1,\\ \phi(x^2) &= (x+1)\cdot 2x = 2x^2+2x,\\ \phi(x^3) &= (x+1)\cdot 3x^2 = 3x^3+3x^2.\end{aligned}$$
Matrika, ki pripada ϕ je torej
$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$
(b) V bazi $\{1, x, x^2, x^3\}$ polinome p_1, p_2 in p_3 predstavimo s stolpci
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}.$$
V stolpčnem prostoru $C(A_\phi)$ matrike A_ϕ sta vsebovana $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2$ pa ne. (Zakaj?) Sledi $p_1, p_3 \in \mathrm{im}\phi$ ter $p_2 \notin \mathrm{im}\phi$.
(c) Preverimo: $\phi(q)(x) = (x+1)\cdot 3(x+1)^2 = 3(x+1)^3 = 3q(x)$. To pomeni, da je q lastni polinom ϕ za lastno vrednost 3.

2. Funkcija g je dana s predpisom
$$g(x) = x\log(1+x^2).$$
   (a) Poišči splošni člen Taylorjeve vrste funkcije g okrog $x_0 = 0$.

   (b) Določi območje konvergence dobljene Taylorjeve vrste.

   (c) Izračunaj $g^{(2017)}(0)$.

Rešitev: (a) Mogoče se na pamet ne spomnimo Taylorjeve vrste za $\log(1+t)$ zato najprej odvajamo $\log(1+x^2)$:

$$\big(\log(1+x^2)\big)' = \frac{2x}{1+x^2} = 2x\cdot\frac{1}{1-(-x^2)} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1}.$$

Sledi

$$\log(1+x^2) + C = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}.$$

Če v to vstavimo $x=0$, ugotovimo $C=0$. Torej $\log(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ in zato

$$g(x) = x\log(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+3}}{n+1}.$$

(b) Uporabimo kvocientni kriterij:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+5}}{(-1)^n(n+2)x^{2n+3}}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = x^2.$$

Ker je $x^2 \le 1$ za $x\in(-1,1)$, je ta Taylorjeva vrsta absolutno konvergenta za $x\in(-1,1)$. Preverimo še, kako je s konvergenco v robnih točkah: Za $x=1$ dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1},$$

ki konvergira po Leibnizovem kriteriju. Za $x=-1$ dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{2n+3}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1},$$

ki prav tako konvergira po Leibnizovem kriteriju. Območje konvergence je torej zaprt interval $[-1,1]$.
(c) Poiščimo indeks n zgornje Taylorjeve vrste za g, pri katerem nastopa $g^{(2017)}(0)$, tj.

$$\cdots + \frac{g^{(2017)}(0)}{2017!}x^{2017} + \cdots$$

Ker je $2n+3 = 2017$ za $n=1007$, sledi

$$g^{(2017)}(0) = -\frac{2017!}{1007}.$$

3. Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije f s predpisom

$$f(x,y,z) = xyz - x - y - z.$$

Ali je katera od stacionarnih točk lokalni minimum oziroma maksimum?
Rešitev: Stacionarne točke so rešitve sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy - 1 = 0.$$

Iščemo torej realna števila x, y in z, da je $xy = 1$, $xz = 1$ in $yz = 1$. Jasno je, da nobeno od teh števil ni enako 0. Če odštejemo po dve zaporedni enačbi dobimo $x(y - z) = 0$ in $z(x - y) = 0$. Ker $x, z \neq 0$, sledi $x = y = z$. Enačba $x^2 = 1$ pa ima rešitvi $x = -1$ in $x = 1$. Dobimo torej dve stacionarni točki $T_1(-1, -1, -1)$ in $T_2(1, 1, 1)$.

Obnašanje v stacionarnih točkah bo odvisno od Hessejeve matrike f v teh točkah. Hessejeva matrika f je

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

V T_1 in T_2 dobimo

$$H_f(-1, -1, -1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } H_f(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti prve matrike so $-2, 1, 1$, lastne vrednosti druge pa $-1, -1, 2$. Obe stacionarni točki sta sedlasti točki in nobena ni lokalni ekstrem.

4. Naj bo D omejeno homogeno telo v $\mathbb{R}^3$, ki ga iz polkrogle dane z

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \; z \geq 0$$

izreže valj dan z

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Izračunaj koordinate masnega središča tega telesa. (Homogenost pomeni, da je gostota konstantna.)

Rešitev: Privzamemo lahko kar $\rho(x, y, z) = 1$. V valjnih koordinatah bomo maso (prostornino) tega telesa izrazili kot

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D \rho(x, y, z)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{2-r^2}} r\, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{2 - r^2}\, dr = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Koordinate masnega središča dobimo iz formul

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{m} \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dxdydz\,, \\ y^* &= \frac{1}{m} \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dxdydz\,, \\ z^* &= \frac{1}{m} \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dxdydz\,. \end{aligned}$$

Ker je telo (homogeno in) simetrično okrog z-osi, je $x^* = y^* = 0$. Poračunamo še

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{2-r^2}} zr\, dz = \frac{2\pi}{m} \int_0^1 \frac{1}{2}(2 - r^2) r\, dr = \\ &= \frac{3\pi}{4m} = \frac{9}{8(2\sqrt{2} - 1)}. \end{aligned}$$

3 Kolokviji 2017/18

3.1 1. Kolokvij

1. kolokvij iz Matematike 2
7. december 2016

1. V vektorskem prostoru polinomov stopnje največ 4, $\mathbb{R}_4[x]$, opazujemo podmnožici

$$\begin{aligned} P &= \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(-1) = p(1) \text{ in } p(0) = 0\} \\ \text{ter } \quad Q &= \{q \in \mathbb{R}_4[x] : q(1) \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

tj. v P so vsi polinomi p, za katere velja $p(-1) = p(1)$ in $p(0) = 0$, v Q pa so vsi polinomi q, ki imajo pri $x = 1$ celoštevilsko vrednost.

(a) Za vsako od podmnožic P in Q odloči ali *je* podprostor v $\mathbb{R}_4[x]$ ali *ni*. Natančno utemelji!

(b) Za tisto podmnožico, ki je podprostor, poišči še bazo in določi dimenzijo.

Rešitev: (a) Začnimo s P. Vzemimo polinoma $p, q \in P$, tj. polinoma p in q, da velja $p(1) = p(-1)$, $p(0) = 0$, $q(1) = q(-1)$ in $q(0) = 0$. Ali je P zaprta za linearne kombinacije? Preverimo; za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$(\alpha p + \beta q)(-1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = (\alpha p + \beta q)(1)$$

in

$$(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

tj. za polinom $\alpha p + \beta q$ prav tako veljata obe lastnosti za polinome iz P. Množica P je torej podprostor.

Podmnožica Q *ni* podprostor. Polinom $q(x) = x$ je vsebovan v Q (saj $q(1) = 1 \in \mathbb{Z}$), vendar $\frac{1}{2}q$ ni vsebovan v Q (saj $\frac{1}{2}q(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

(b) Naj bo $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ predpis za polinom iz $\mathbb{R}_4[x]$. Da bo ta polinom vsebovan v P, mora veljati $p(-1) = p(1)$ in $p(0) = 0$. Dobimo enačbi

$$\begin{aligned} a - b + c - d + e &= a + b + c + d + e \\ \text{in } e &= 0. \end{aligned}$$

To pa pomeni $e = 0$, $d = -b$, a, b in c pa so lahko poljubna realna števila. Polinomi $p \in P$ imajo torej predpis oblike

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx$$

za poljubne $a, b, c \in \mathbb{R}$. Od tod sledi, da je baza za P kar $\mathcal{B}_P = \{x^4, x^3 - x, x^2\}$. $\dim P = 3$.

2. Naj bo $\mathbf{a} = [1, 1]^\mathsf{T}$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je dana s predpisom

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,\mathbf{a}^\mathsf{T} = \mathbf{x}\,[1, 1].$$

(a) Utemelji, da je ϕ linearna preslikava.

(b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Določi $\dim(\ker\phi)$ in $\dim(\mathrm{im}\phi)$.

(d) Poišči bazo za $\mathrm{im}\phi$.

Rešitev: (a) Preverimo, da ϕ ohranja linearne kombinacije. Velja

$$\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\mathbf{a}^\mathsf{T} = \alpha\mathbf{x}\,\mathbf{a}^\mathsf{T} + \beta\mathbf{y}\,\mathbf{a}^\mathsf{T} = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \alpha\phi(\mathbf{y})$$

za vse $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ in vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ϕ je linearna.

(b) Poračunajmo, v kaj ϕ preslika vektorje standardne baze $\mathbb{R}^2$.

$$\phi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1,1] = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = E_{11} + E_{12}$$
$$\phi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[1,1] = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = E_{21} + E_{22}$$

Matrika, ki pripada ϕ je torej

$$A_\phi = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

(c) Matrika A_ϕ ima rang 2, torej $\dim(\mathrm{im}\phi) = \dim(C(A_\phi)) = 2$. Za jedro potem velja $\dim(\ker\phi) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathrm{im}\phi) = 2 - 2 = 0$.

(d) Zagotovo sta v $\mathrm{im}\phi$ matriki $\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{smallmatrix}\right]$ in $\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{smallmatrix}\right]$. Ker sta linearno neodvisni in je $\dim(\mathrm{im}\phi) = 2$, je baza za $\mathrm{im}\phi$ kar $\mathcal{B}_{\mathrm{im}\phi} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{smallmatrix}\right]\right\}$.

3. Linearna preslikava $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ poljuben vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ najprej zrcali preko ravnine $x - z = 0$, nato pa še preko ravnine $z = 0$.

(a) Utemelji, da je ψ izometrija.

(b) Poišči lastne vrednosti izometrije ψ ter tiste lastne vektorje ψ, ki pripadajo realnim lastnim vrednostim.

(c) Katera izometrija je ψ?

Rešitev: (a) Ker je ψ kompozitum dveh zrcaljenj (ki sta izometriji), je tudi ψ izometrija.

(b) Narišemo skico in vidimo, da ψ slika vektorje standardne baze $\mathbb{R}^3$ tako:

$$\psi(\mathbf{i}) = -\mathbf{k}\ ,\ \ \psi(\mathbf{j}) = \mathbf{j}\ ,\ \ \psi(\mathbf{k}) = \mathbf{i}.$$

Matrika, ki pripada ψ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$ je torej

$$A_\psi = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom te matrike je $\det(A_\psi - \lambda I) = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$. Lastne vrednosti so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ in $\lambda_3 = i$. Pri edini realni lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je lastni vektor kar $\mathbf{j}$ (od prej vemo $\psi(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$).

(c) ψ je zasuk z osjo $\mathbf{j}$ za kot $\pi/2$. (Kot med vektorjema $\mathbf{k}$ in $\psi(\mathbf{k}) = \mathbf{i}$—pomembno je, da vzamemo vektor pravokoten na os vrtenja. Lahko pa kot določimo iz polarnega zapisa $\lambda_3 = i = e^{i\,\pi/2}$. Pri obeh načinih smo površni in zanemarjamo orientacijo.)

4. Funkcija f je vsota potenčne vrste

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k\, k}.$$

(a) Na katerem intervalu v $\mathbb{R}$ ta vrsta konvergira? Posebej preveri, kako je s konvergenco v robnih točkah.

(b) Odvajaj zgornjo vrsto in eksplicitno izrazi $f'(x)$.

(c) S pomočjo (b) poišči predpis za $f(x)$.

(d) Izračunaj vsoto vrste $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k}$.

Rešitev: (a) Iz kvocientnega kriterija za vrsto s členi $a_k = \frac{x^{3k}}{3^k\, k}$ dobimo

$$q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{kx^3}{3(k+1)}\right| = \left|\frac{x^3}{3}\right|,$$

neenačbo $q < 1$ oziroma $|x^3/3| < 1$ rešijo vsi $x \in (-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$. V robni točki $x = -\sqrt[3]{3}$ dobimo vrsto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

ki konvergira po Leibnizovem kriteriju. V robni točki $x = \sqrt[3]{3}$ pa dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

ki divergira. Območje konvergence je torej $[-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$.

(b) Vrsto za f odvajamo po členih in seštejemo dobljeno geometrijsko vrsto:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3kx^{3k-1}}{3^k\, k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k-1}}{3^{k-1}} = \frac{3}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^3)^k}{3^k} = \frac{3}{x} \cdot \frac{x^3/3}{1 - x^3/3} = \frac{3x^2}{3 - x^3}.$$

(c) Integriramo $f'(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \frac{3x^2}{3 - x^3}\, dx = -\log(3 - x^3) + C,$$

kjer zadnji integral uženemo z uvedbo nove spremenljivke $t = 3 - x^3$. Da določimo C, vstavimo $x = 0$:

$$0 = -\log 3 + C,$$

kar pomeni, da je $C = \log 3$. Vsota vrste za f je tako

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k\, k} = \log 3 - \log(3 - x^3) = \log\left(\frac{3}{3 - x^3}\right).$$

(d) Vsota te vrste je ravno $f(1)$. Imamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k} = f(1) = \log\left(\frac{3}{2}\right).$$

3.2 2. Kolokvij

2. kolokvij iz Matematike 2
30. november 2017

1. Dana je baza $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$, kjer so

$$\mathbf{a} = [1,0,0]^\mathsf{T}\ ,\ \ \mathbf{b} = [1,1,0]^\mathsf{T}\ ,\ \ \mathbf{c} = [1,1,1]^\mathsf{T}.$$

Linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ slika te vektorje tako:

$$\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}\ ,\ \ \phi(\mathbf{b}) = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}\ ,\ \phi(\mathbf{c}) = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

(a) Poišči matriko, ki pripada ϕ v bazi $\mathcal{B}$.

(b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Utemelji, da je ϕ linearna izometrija.

(c) Poišči tiste lastne vektorje ϕ, ki pripadajo realnim lastnim vrednostim, in klasificiraj izometrijo ϕ.

Rešitev: (a) Matrika, ki pripada ϕ glede na bazo $\mathcal{B}$ je

$$A_{\phi,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ker je $\mathbf{i} = \mathbf{a}$, $\mathbf{j} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ in $\mathbf{k} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, dobimo $\phi(\mathbf{i}) = -\mathbf{j}$, $\phi(\mathbf{j}) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = \mathbf{i}$ in $\phi(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{c}) - \phi(\mathbf{b}) = -\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{k}$. Matrika, ki pripada ϕ glede na standardno bazo je torej

$$A_{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je A_ϕ ortogonalna in pripada ϕ glede na standarno (torej ortonormirano) bazo, je ϕ linearna izometrija.
(c) Iz $\det(A_\phi - \lambda I) = (\lambda^2 + 1)(1 - \lambda)$ sledi, da so lastne vrednosti ϕ $\lambda_1 = 1$ ter $\lambda_{2,3} = \pm i$. Pri edini realni lastni vrednosti ($\lambda_1 = 1$) dobimo lastni vektor $\mathbf{k}$ (saj je $\phi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$). Izometrija ϕ je torej rotacija za kot $\pm\pi/2$ okrog z-osi. (Kot lahko dobimo iz $\pm i = e^{\pm\pi i/2}$.)

2. Funkcija f je vsota potenčne vrste $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}\, x^{2k+1}$.

(a) Določi območje konvergence zgornje vrste. Posebej preveri, kako je s konvergenco v robnih točkah.

(b) Poišči predpis za $f(x)$. (*Namig:* Integriraj po členih in izrazi $\int f(x)\,dx$. Nato odvajaj.)

(c) Izračunaj vsoto številske vrste $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{3k+1}}$.

Rešitev: (a) Območje absolutne konvergence da kvocientni kriterij

$$q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)x^2}{2(k+1)} = \frac{x^2}{2}.$$

Iz $q = x^2/2 < 1$ sedaj sledi $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. V robnih točkah $x = \pm\sqrt{2}$ dobimo vrsti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}(-\sqrt{2})^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} -\sqrt{2}(k+1) \text{ in (podobno) } \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2}(k+1).$$

Obe vrsti divergirata, saj členi nimajo limite 0. Območje konvergence je torej odprt interval $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
(b) Direktno integriramo posamezen člen:

$$\int a_k\,dx = \int \frac{k+1}{2^k} x^{2k+1}\,dx = \frac{k+1}{2^k} \cdot \frac{x^{2k+2}}{2(k+1)} + C_k = \frac{(x^2)^{k+1}}{2^{k+1}} + C_k.$$

Konstante C_k ignorirajmo (saj bomo funkcijo kasneje tako ali tako odvajali) in dobimo

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{x^2/2}{1-x^2/2} = \frac{x^2}{2-x^2}.$$

Od tod dobimo

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2-x^2}\right)' = \frac{4x}{(2-x^2)^2}.$$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{3k+1}} = f(1/2) = \frac{4 \cdot 1/2}{(2-(1/2)^2)^2} = \frac{32}{49}.$

3.3 3. Kolokvij

3. kolokvij iz Matematike 2
21. december 2017

1. Funkcija dveh spremenljivk r ima predpis

$$r(x,y) = (e^x - y)\cos x.$$

   (a) Z uporabo Taylorjevega polinoma 1. reda funkcije r določi približno vrednost izraza $(e^{0.1} + 0.05)\cos(0.1)$.

   (b) Ali je $T_1(0,1)$ stacionarna/kritična točka funkcije r? Kaj pa $T_2(\pi/2, e^{\pi/2})$? Za tisto točko, ki je stacionarna, določi njen tip!

Rešitev: (a) Poiskati želimo približno vrednost izraza $r(0.1, -0.05)$. Odvoda r sta

$$\frac{\partial r}{\partial x} = e^x \cos x - (e^x - y)\sin x,$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\cos x.$$

Torej:

$$r(0.1,-0.05) \doteq r(0,0) + \frac{\partial r}{\partial x}(0,0)\cdot 0.1 + \frac{\partial r}{\partial y}(0,0)\cdot(-0.05) = 1 + 0.1 + 0.05 = 1.15.$$

(b) Ker je $\frac{\partial r}{\partial y}(0,1) = -\cos 0 = -1 \neq 0$, $T_1(0,1)$ *ni* stacionarna točka. Po drugi strani pa je $\frac{\partial r}{\partial x}(\pi/2, e^{\pi/2}) = \frac{\partial r}{\partial y}(\pi/2, e^{\pi/2}) = 0$, torej je točka $T_2(\pi/2, e^{\pi/2})$ stacionarna.

Za tip T_2 bomo potrebovali Hessejevo matriko r:

$$H_r = \begin{bmatrix} -2e^x \sin x + y\cos x & \sin x \\ \sin x & 0 \end{bmatrix}.$$

Le-ta je v točki T_2 enaka

$$H_r(\pi/2, e^{\pi/2}) = \begin{bmatrix} -2e^{\pi/2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\det(H_r(\pi/2, e^{\pi/2})) = -1 < 0$, sta lastni vrednosti Hessejeve matrike v stacionarni točki različno predznačeni in T_2 je sedlo.

2. Poišči tiste točke na elipsi z enačbo

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 6,$$

ki so najbolj oddaljene od y-osi.
Namig: Za funkcijo vzemi kvadrat oddaljenosti od y-osi.

Rešitev: Kvadrat oddaljenosti od y-osi predstavlja funkcija $f(x,y) = x^2$. Vez lahko zapišemo v obliki $x^2 + 2xy + 2y^2 - 6 = 0$, kjer levo stran te enačbe označimo z $g(x,y)$. Pripadajoča Lagrangeova funkcija je

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 - \lambda(x^2 + 2xy + 2y^2 - 6).$$

Poiščimo stacionarne točke L!

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda(2x + 2y) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\lambda(2x + 4y) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + 2xy + 2y^2 - 6) = 0. \tag{3}$$

Iz enačbe (2) sledi $\lambda = 0$ ali $x = -2y$. V primeru $\lambda = 0$ najprej iz enačbe (1) sledi $x = 0$, nato pa iz enačbe (3) dobimo $2y^2 - 6 = 0$ ali $y = \pm\sqrt{3}$. Prva dva kandidata sta torej točki $T_{1,2}(0, \pm\sqrt{3})$. V primeru $x = -2y$ pa direktno iz enačbe (3) sledi $2y^2 - 6 = 0$ ali $y = \pm\sqrt{3}$. Tokrat je $x = -2y = \mp 2\sqrt{3}$ in imamo še dve stacionarni točki $T_{3,4}(\mp 2\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$. Ti zadnji dve točki sta tudi tisti, ki sta najdlje od y-osi.

3.4 4. Kolokvij

4. kolokvij iz Matematike 2
16. januar 2018

1. Izračunaj maso telesa nad xy-ravnino ($z \geq 0$), ki ga iz krogle z neenačbo
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$
izreže stožec z neenačbo
$$x^2 + y^2 \leq z^2,$$
če je funkcija gostote enaka $\rho(x, y, z) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Namig: Nariši skico. Računaj v sfernih/krogelnih koordinatah.

Rešitev: Del stožca z neenačbo $x^2 + y^2 \leq z^2$ nad xy-ravnino v krogelnih koordinatah pokrijemo tako, da vzamemo $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ in $\phi \in [0, 2\pi]$. Da ostanemo znotraj krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2^2$, mora veljati $r \leq 2$. Funkcija gostote se v krogelnih koordinatah izraža kot $\rho(r, \phi, \theta) = 2 - r$. Upoštevamo še $\det(J\mathbf{F}) = r^2 \cos\theta$ in dobimo integral za maso

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D \rho \, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^2 (2 - r)\, r^2 \cos\theta \, dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^2 (2r^2 - r^3) dr\right) \\ &= 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. Naj bo $\mathbf{F}$ ravninsko vektorsko polje s predpisom
$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x + 3xy \\ y - 3xy \end{bmatrix}.$$
Izračunaj krivuljni integral $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ (pretok polja $\mathbf{F}$ skozi $\mathbf{K}$), če je:
   (a) $\mathbf{K}$ daljica od točke $A(1, 0)$ do točke $B(-1, 0)$,
   (b) $\mathbf{K}$ lok krožnice z enačbo $x^2 + y^2 = 1$, ki leži nad x-osjo, orientiran od točke $A(1, 0)$ do točke $B(-1, 0)$.

Rešitev: (a) Ena od možnih parametrizacij za daljico od A do B je
$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \end{bmatrix} \text{ za } t \in [-1, 1].$$
Krivuljni integral $\mathbf{F}$ vzdolž daljice $\mathbf{K}$ je potem
$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -t \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_{-1}^{1} t \, dt = 0.$$
(b) Krožnico s polmerom 1 in središčem v izhodušču parametriziramo s
$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Ker želimo opisati le lok od A do B, vzamemo $t \in [0, \pi]$. Dobimo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)\, dt = \int_0^\pi \begin{bmatrix} \cos t + 3\cos t \sin t \\ \sin t - 3\cos t \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt \\
&= -3 \int_0^\pi (\cos t \sin^2 t + \cos^2 t \sin t) dt \\
&= -3 \left(\int_0^\pi \cos t \sin^2 t\, dt + \int_0^\pi \cos^2 t \sin t\, dt \right) \\
&= -3 \cdot \left(0 + \frac{2}{3} \right) = -2.
\end{aligned}
$$

(Prvega od zadnjih dveh integralov lahko uženemo s substitucijo $u = \sin t$, drugega pa s substitucijo $u = \cos t$.)

3.5 1. Popravni kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
1. februar 2018

1. Zapišimo $p \in \mathbb{R}_2[x]$ kot $p(x) = a + bx + cx^2$. Preslikavi $\eta\colon \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}_2[x]$ in $\theta\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ sta dani s predpisoma

$$\eta(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \ , \ \theta(p) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

   (a) Preveri, da je η linearna preslikava. (Linearnosti θ *ni* potrebno preverjati.)

   (b) Določi $\dim(\ker \eta)$ in $\dim(\mathrm{im}\eta)$ ter $\dim(\ker \theta)$ in $\dim(\mathrm{im}\theta)$.

   (c) Ali je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$? Ali je 3 lastna vrednost $\eta \circ \theta$?

Rešitev: (a) Preveriti moramo, da η ohranja linearne kombinacije. Označimo $\mathbf{a}^\mathsf{T} = [1, 1, 1]$ in $\mathbf{b}^\mathsf{T} = [1, x, x^2]$. Potem je $\eta(X) = \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{b}$ in velja

$$\eta(\alpha X + \beta Y) = \mathbf{a}^\mathsf{T}(\alpha X + \beta Y)\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{b} + \beta \mathbf{a}^\mathsf{T} Y \mathbf{b} = \alpha\, \eta(X) + \beta\, \eta(Y)$$

za poljubni matriki $X, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η je torej linearna.
(b) Velja

$$\eta(E_{11}) = 1 \ , \ \eta(E_{12}) = x \ \text{ in } \ \eta(E_{13}) = x^2,$$

kjer so E_{ij} standardne bazne matrike $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Ker $\mathrm{im}\eta$ vsebuje bazo $\mathbb{R}_2[x]$, je $\mathrm{im}\eta = \mathbb{R}_2[x]$. Torej $\dim(\mathrm{im}\eta) = 3$ in $\dim(\ker \eta) = \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) - \dim(\mathrm{im}\eta) = 9 - 3 = 6$.

Pri θ takoj vidimo, da je edina rešitev enačbe $\theta(p) = 0$ (z matriko 0 na desni) polinom $p = 0$. Torej je $\dim(\ker \theta) = 0$ in zato $\dim(\mathrm{im}\theta) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - \dim(\ker \theta) = 3 - 0 = 3$.
(c) Odgovorimo najprej na drugo vprašanje. Če pišemo $p(x) = a + bx + cx^2$, potem je

$$(\eta \circ \theta)(p) = \eta(\theta(a + bx + cx^2) = 3a + 3bx + 3cx^2 = 3p,$$

torej je $\eta \circ \theta = 3\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}$, ta pa ima (le) lastno vrednost 3.

Zvit odgovor na prvo vprašanje gre tako: Vemo, da za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$ velja $\eta(\theta(p)) = 3p$. Če obe strani te enačbe vstavimo v θ, dobimo $\theta(\eta(\theta(p))) = 3\theta(p)$ oziroma

$$(\theta \circ \eta)(\theta(p)) = 3\theta(p).$$

Ker je θ injektivna po (b), to pomeni, da je $\theta(p)$ lastna matrika $\theta \circ \eta$ za lastno vrednost 3. (Za p smo seveda izbrali neničeln polinom.)

Z direktnim računom pa gre tako: Pišimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$(\theta \circ \eta)(X) = \theta(\eta(X)) = \begin{bmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{bmatrix}.$$

Posebej je

$$(\theta \circ \eta)\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

kar spet pomeni, da je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$.

2. Funkcija g ima predpis

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}.$$

(a) Poišči splošni člen Taylorjeve vrste za g okrog $x_0 = 0$.

(b) Določi območje konvergence dobljene Taylorjeve vrste.

(c) Izračunaj $g^{(2019)}(0)$.

Rešitev: (a) Iz Taylorjeve vrste za e^x, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, izpeljemo

$$\begin{aligned}(1 - x^2)e^{-x^2} &= (1 - x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n-1)!}\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\right)x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1+n}{n!}\,x^{2n}.\end{aligned}$$

Splošni člen za sode indekse $2n$ (razen tistega pri $2n = 0$) je torej

$$a_{2n} = (-1)^n\,\frac{1+n}{n!},$$

koeficienti pri lihih potencah x pa so vsi enaki 0.
(b) Iz kvocientnega kriterija dobimo

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2(n+1)}x^{2(n+1)}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \cdots = 0,$$

torej vrsta konvergira za vsa realna števila x.
(c) Ker v razvoju iz (a) dela naloge lihe potence ne nastopajo, je $g^{(2019)}(0) = 0$.

3. Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$

na (polni) elipsi z neenačbo

$$x^2 - xy + y^2 \le 1.$$

Rešitev: Poiskati moramo kandidate za ekstreme v notranjosti in za ekstreme na robu. V notranjosti so kandidati za ekstreme stacionarne točke funkcije f:

$$\begin{aligned}f_x &= -2x = 0,\\ f_y &= -2y = 0.\end{aligned}$$

Ta sistem ima edino rešitev $T_1(0, 0)$, ki je kandidat za ekstrem, saj ustreza neenakosti, ki določa elipso.

Ekstreme na robu poiščemo z Lagrangeovo metodo:

$$L(x, y, \lambda) = 2 - x^2 - y^2 - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1).$$

Stacionarne točke L so rešitve sistema:

$$L_x = -2x - \lambda(2x - y) = 0, \tag{4}$$

$$L_y = -2y - \lambda(2y - x) = 0, \tag{5}$$

$$L_\lambda = -(x^2 - xy + y^2 - 1) = 0. \tag{6}$$

Iz (1) dobimo $\frac{1}{\lambda} = \frac{y-2x}{2x}$ iz (2) pa $\frac{1}{\lambda} = \frac{x-2y}{2y}$, od koder sledi $x^2 = y^2$ oziroma $y = \pm x$. Ko to vstavimo v enačbo (3), dobimo štiri stacionarne točke: $T_{2,3}(\pm 1, \pm 1)$ in $T_{4,5}(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3})$.

Vrednosti funkcije f v točkah $T_1, \ldots, T_5$ so:

$T(x,y)$	$f(x,y)$
$T_1(0,0)$	2
$T_{2,3}(\pm 1, \pm 1)$	0
$T_{4,5}(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3})$	$4/3$

Največja vrednost f na elipsi je torej 2, najmanjša pa 0.

4. Vektorsko polje $\mathbf{F}$ ima predpis

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) - 2xy \\ \sin(y) + x - x^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunaj

$$\iint_D (Q_x - P_y) dxdy,$$

kjer je D območje določeno z $x^2 + y^2 \leq 1$ in $x \geq 0$.

(b) Izračunaj krivuljni integral $\int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, kjer je $\mathbf{L}$ daljica od $A(0,1)$ do $B(0,-1)$.

(c) Izračunaj krivuljni integral $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, kjer je $\mathbf{K}$ pozitivno orientiran krožni lok določen z $x^2 + y^2 = 1$ in $x \geq 0$. (Lahko uporabiš (a) in (b).)

Rešitev: (a) Ker je $Q_x - P_y = 1$, je integral enak

$$\iint_D (Q_x - P_y)\, dxdy = \iint_D dxdy = \frac{\pi}{2},$$

saj je območje D polovica kroga s polmerom 1, integral konstante 1 po območju D pa predstavlja ravno ploščino tega območja.
(b) Ena od možnih parametrizacij daljice $\mathbf{L}$ je $\mathbf{p}(t) = [0, -t]^\mathsf{T}$ za $t \in [-1, 1]$. Potem

$$\int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 \\ \sin(-t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dt = \int_{-1}^{1} \sin(t) dt = 0.$$

(c) Po Greenovi formuli in (a) delu naloge je

$$\int_{\mathbf{K} \cup \mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (Q_y - P_x)\, dxdy = \iint_D dxdy = \frac{\pi}{2}$$

in zato iz (b)

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\pi}{2}.$$

3.6 2. Popravni kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
16. februar 2018

1. Zapišimo $p \in \mathbb{R}_2[x]$ kot $p(x) = ax^2 + bx + c$. Preslikavi $\eta\colon \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}_2[x]$ in $\theta\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ sta dani s predpisoma

$$\eta(X) = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ \theta(p) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}.$$

(a) Preveri, da je η linearna preslikava. (Linearnosti θ *ni* potrebno preverjati.)

(b) Določi $\dim(\ker \eta)$ in $\dim(\mathrm{im}\eta)$ ter $\dim(\ker \theta)$ in $\dim(\mathrm{im}\theta)$.

(c) Ali je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$? Ali je 3 lastna vrednost $\eta \circ \theta$?

Rešitev: (a) Preveriti moramo, da η ohranja linearne kombinacije. Označimo $\mathbf{a}^\mathsf{T} = [x^2, x, 1]$ in $\mathbf{b}^\mathsf{T} = [1, 1, 1]$. Potem je $\eta(X) = \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{b}$ in velja

$$\eta(\alpha X + \beta Y) = \mathbf{a}^\mathsf{T}(\alpha X + \beta Y)\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{b} + \beta \mathbf{a}^\mathsf{T} Y \mathbf{b} = \alpha\, \eta(X) + \beta\, \eta(Y)$$

za poljubni matriki $X, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η je torej linearna.
(b) Velja

$$\eta(E_{11}) = x^2 \ , \ \eta(E_{21}) = x \ \text{ in } \ \eta(E_{31}) = 1,$$

kjer so E_{ij} standardne bazne matrike $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Ker $\mathrm{im}\eta$ vsebuje bazo $\mathbb{R}_2[x]$, je $\mathrm{im}\eta = \mathbb{R}_2[x]$. Torej $\dim(\mathrm{im}\eta) = 3$ in $\dim(\ker \eta) = \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) - \dim(\mathrm{im}\eta) = 9 - 3 = 6$.

Pri θ takoj vidimo, da je edina rešitev enačbe $\theta(p) = 0$ (z matriko 0 na desni) polinom $p = 0$. Torej je $\dim(\ker \theta) = 0$ in zato $\dim(\mathrm{im}\theta) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - \dim(\ker \theta) = 3 - 0 = 3$.
(c) Odgovorimo najprej na drugo vprašanje. Če pišemo $p(x) = ax^2 + bx + c$, potem je

$$(\eta \circ \theta)(p) = \eta(\theta(ax^2 + bx + c)) = 3ax^2 + 3bx + 3c = 3p,$$

torej je $\eta \circ \theta = 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}$, ta pa ima (le) lastno vrednost 3.

Zvit odgovor na prvo vprašanje gre tako: Vemo, da za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$ velja $\eta(\theta(p)) = 3p$. Če obe strani te enačbe vstavimo v θ, dobimo $\theta(\eta(\theta(p))) = 3\theta(p)$ oziroma

$$(\theta \circ \eta)(\theta(p)) = 3\theta(p).$$

Ker je θ injektivna po (b), to pomeni, da je $\theta(p)$ lastna matrika $\theta \circ \eta$ za lastno vrednost 3. (Za p smo seveda izbrali neničeln polinom.)

Z direktnim računom pa gre tako: Pišimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$(\theta \circ \eta)(X) = \theta(\eta(X)) = \begin{bmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ d+e+f & d+e+f & d+e+f \\ g+h+i & g+h+i & g+h+i \end{bmatrix}.$$

Posebej je

$$(\theta \circ \eta)\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar spet pomeni, da je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$.

2. Funkcija g ima predpis

$$g(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}.$$

   (a) Poišči splošni člen Taylorjeve vrste za g okrog $x_0 = 0$.
   (b) Določi območje konvergence dobljene Taylorjeve vrste.
   (c) Izračunaj $g^{(2018)}(0)$.

Rešitev: (a) Iz Taylorjeve vrste za e^x, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, izpeljemo

$$\begin{aligned}(1+x^2)e^{-x^2} &= (1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\right)x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1-n}{n!}\,x^{2n}.\end{aligned}$$

Splošni člen za sode indekse $2n$ (razen tistega pri $2n = 0$) je torej

$$a_{2n} = (-1)^n\,\frac{1-n}{n!},$$

koeficienti pri lihih potencah x pa so vsi enaki 0.
(b) Iz kvocientnega kriterija dobimo

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2(n+1)}x^{2(n+1)}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \cdots = 0,$$

torej vrsta konvergira za vsa realna števila x.
(c) Pri potenci x^{2018} nastopa člen $\frac{g^{(2018)}(0)}{2018!} = a_{2018} = a_{2\cdot 1009} = (-1)^{1009}\,\frac{1-1009}{1009!} = \frac{1008}{1009!}$. Torej je $g^{2018}(0) = 2018! \cdot \frac{1008}{1009!}$.

3. Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

   na (polni) elipsi z neenačbo

$$x^2 + xy + y^2 \leq 1.$$

Rešitev: Poiskati moramo kandidate za ekstreme v notranjosti in za ekstreme na robu. V notranjosti so kandidati za ekstreme stacionarne točke funkcije f:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x = 0, \\ f_y &= 2y = 0. \end{aligned}$$

Ta sistem ima edino rešitev $T_1(0,0)$, ki je kandidat za ekstrem, saj ustreza neenakosti, ki določa elipso.

Ekstreme na robu poiščemo z Lagrangeovo metodo:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1).$$

Stacionarne točke L so rešitve sistema:

$$L_x = 2x - \lambda(2x + y) = 0, \tag{7}$$

$$L_y = 2y - \lambda(2y + x) = 0, \tag{8}$$

$$L_\lambda = -(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0. \tag{9}$$

Iz (1) dobimo $\frac{1}{\lambda} = \frac{y+2x}{2x}$ iz (2) pa $\frac{1}{\lambda} = \frac{x+2y}{2y}$, od koder sledi $x^2 = y^2$ oziroma $y = \pm x$. Ko to vstavimo v enačbo (3), dobimo štiri stacionarne točke: $T_{2,3}(\pm 1, \mp 1)$ in $T_{4,5}(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$.

Vrednosti funkcije f v točkah $T_1, \ldots, T_5$ so:

$T(x,y)$	$f(x,y)$
$T_1(0,0)$	-2
$T_{2,3}(\pm 1, \mp 1)$	0
$T_{4,5}(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$	$-4/3$

Največja vrednost f na elipsi je torej 0, najmanjša pa -2.

4. Vektorsko polje $\mathbf{F}$ ima predpis

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(1-x) - 2xy \\ y\cos y + x - x^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunaj

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

kjer je D območje določeno z $x^2 + y^2 \leq 1$ in $x \leq 0$.

(b) Izračunaj krivuljni integral $\int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, kjer je $\mathbf{L}$ daljica od $A(0,-1)$ do $B(0,1)$.

(c) Izračunaj krivuljni integral $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, kjer je $\mathbf{K}$ pozitivno orientiran krožni lok določen z $x^2 + y^2 = 1$ in $x \leq 0$. (Lahko uporabiš (a) in (b).)

Rešitev: (a) Ker je $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, je integral enak

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D dxdy = \frac{\pi}{2},$$

saj je območje D polovica kroga s polmerom 1, integral konstante 1 po območju D pa predstavlja ravno ploščino tega območja.
(b) Ena od možnih parametrizacij daljice $\mathbf{L}$ je $\mathbf{p}(t) = [0, t]^{\mathsf{T}}$ za $t \in [-1, 1]$. Potem

$$\int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 0 \\ t\cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_{-1}^{1} t\cos(t) dt = 0.$$

(Zadnji določeni integral je integral lihe funkcije na simetričnem intervalu.)
(c) Po Greenovi formuli in (a) delu naloge je

$$\int_{\mathbf{K} \cup \mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D dxdy = \frac{\pi}{2}$$

in zato iz (b)

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\pi}{2}.$$

3.7 3. Popravni kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
24. avgust 2018

1. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ je dana s predpisom $\phi(p) = p + 2p'$.

   (a) Preveri, da je ϕ linearna preslikava.

   (b) Poišči matriko A_ϕ, ki pripada ϕ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

   (c) Poišči lastne vrednosti preslikave ϕ. Ali lahko ϕ diagonaliziramo? *Natančno utemelji!*

   Rešitev: (a) Preveriti moramo, da ϕ ohranja linearne kombinacije. Za $p, q \in \mathbb{R}_3[x]$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\phi(\alpha p + \beta q) &= (\alpha p + \beta q) + 2(\alpha p + \beta q)' = (\alpha p + \beta q) + 2(\alpha p' + \beta q') \\ &= \alpha(p + 2p') + \beta(q + 2q') = \alpha\phi(p) + \beta\phi(q),\end{aligned}$$

   ϕ je torej linearna.
   (b) Standardna (urejena) baza $\mathbb{R}_3[x]$ je $\{1, x, x^2, x^3\}$. Preslikava ϕ bazne polinome slika v

$$\begin{aligned}\phi(1) &= 1, \\ \phi(x) &= 2 + x, \\ \phi(x^2) &= 4x + x^2, \\ \phi(x^3) &= 6x^2 + x^3.\end{aligned}$$

   Matrika, ki pripada ϕ, je torej

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (c) Lastne vrednosti ϕ so enake lastnim vrednostim A_ϕ. Ker je A_ϕ zgornje trikotna, so njene lastne vrednosti na diagonali. Lastne vrednosti ϕ so torej vse enake 1; $\lambda_{1,2,3,4} = 1$. Ker je rang matrike $A_\phi - I$ enak 3 (in ne 0, kolikor je razlika med $\dim(\mathbb{R}_3[x])$ in algebraično večkratnostjo lastne vrednosti 1), preslikave ϕ ne moremo diagonalizirati.

2. Funkcija g je vsota potenčne vrste

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k+1}.$$

   (a) Določi območje konvergence zgornje potenčne vrste.

   (b) Seštej zgornjo vrsto – izrazi funkcijo g eksplicitno. *(Namig: Poskusi najprej odvajati vrsto, ki pripada $x^2 g(x)$.)*

   (c) Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k(k+1)}.$$

Rešitev: (a) Območje absolutne konvergence določimo s kvocientnim kriterijem, k-ti člen vrste je $a_k = \frac{x^{2k}}{k+1}$ in

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)x^{2k+2}}{kx^{2k}} = x^2.$$

Po kvocientnem kriteriju mora biti vrednost te limite strogo manj od 1. Iz $x^2 < 1$ torej za območje absolutne konvergence dobimo $x \in (-1, 1)$.

Konvergenco v robnih točkah tega intervala preverimo posebej. Če v originalno vrsto vstavimo $x = \pm 1$, dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1},$$

ki divergira. Območje konvergence je torej odprt interval $(-1, 1)$.
(b) Upoštevajmo namig. Označimo

$$h(x) = x^2 g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{k+1}.$$

Tedaj je

$$h'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)x^{2x+1}}{k+1} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{2x}{1-x^2}.$$

Torej

$$h(x) = \int h'(x)\, dx = \int \frac{2x\, dx}{1-x^2} = -\log(1-x^2) + C.$$

Iz $h(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^{2k}}{k+1} = 0$, sledi $-\log(1-0^2) + C = 0$, torej $C = 0$. Zato $h(x) = -\log(1-x^2)$ in končno

$$g(x) = -\frac{\log(1-x^2)}{x^2}.$$

(c) To številsko vrsto dobimo, če v g vstavimo $x = 1/2$. Zato

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k(k+1)} = g\left(\frac{1}{2}\right) = -4\log\left(\frac{3}{4}\right) = 4\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

3. Delec z maso m zaprt v pravokotnik s stranicama dolžin x in y ima na neizotropni ravnini energijo osnovnega stanja dano z

$$E(x, y) = \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2}\right).$$

Kolikšni naj bosta dolžini stranic tega pravokotnika, da bo pri njegovi fiksni ploščini $A_0 = xy > 0$ energija osnovnega stanja minimalna?
Namig: Poišči minimum funkcije $E(x, y)$ pri pogoju $xy = A_0$.

Rešitev: Temu problemu vezanih ekstremov pripada Lagrange-ova funkcija

$$L(x, y, \lambda) = E(x, y) - \lambda g(x, y) = \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2}\right) - \lambda(xy - A_0).$$

Stacionarne točke te funkcije bodo kandidati za vezane ekstreme. Poiščimo jih!

$$\begin{aligned}
L_x &= -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{2}{x^3} - \lambda y = 0, \\
L_y &= -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{4}{y^3} - \lambda x = 0, \\
L_\lambda &= A_0 - xy = 0.
\end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb eliminiramo λ:

$$\lambda = -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{2}{x^3 y} = -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{4}{xy^3},$$

da dobimo

$$2x^3 y = xy^3.$$

Rešitve, pri katerih je $x = 0$ ali $y = 0$, niso dopustne (zaradi $A_0 = xy > 0$) in zadnja enačba se poenostavi v

$$2x^2 = y^2.$$

Torej $y = \pm x\sqrt{2}$. Ko to vstavimo v enačbo vezi, dobimo

$$A_0 = \pm x^2 \sqrt{2}.$$

Smiseln je le + predznak (saj $A_0 > 0$) in sledi $x = \sqrt{A_0/\sqrt{2}}$ ter $y = x\sqrt{2} = \sqrt{A_0\sqrt{2}}$.

4. Dano je vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y) = [y^2, 2xy]^\mathsf{T}$.

   (a) Prepričaj se, da je polje $\mathbf{F}$ gradientno.

   (b) Izračunaj krivuljni integral

   $$\int_\mathbf{K} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s} = \int_\mathbf{K} y^2\, dx + 2xy\, dy,$$

   kjer je $\mathbf{K}$ pozitivno orientiran krožni lok določen z $x^2 + y^2 = 1$ in $y \geq 0$.

   (c) Poišči skalarni potencial polja $\mathbf{F}$, tj. funkcijo dveh spremenljivk f, da bo $\mathbf{F} = \mathrm{grad}(f)$.

Rešitev: (a) Preverimo, da za $P(x, y) = y^2$ in $Q(x, y) = 2xy$ velja $P_y = Q_x$:

$$P_y = 2y = Q_x$$

in polje $\mathbf{F}$ je gradientno.
(c) Skalarni potencial lahko kar uganemo: $f(x, y) = xy^2$. Tedaj res velja

$$\mathrm{grad}(f) = [f_x, f_y]^\mathsf{T} = [y^2, 2xy]^\mathsf{T} = \mathbf{F}(x, y).$$

(b) Ker je polje $\mathbf{F}$ gradientno s skalarnim potencialom f, je

$$\int_\mathbf{K} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s} = f(-1, 0) - f(1, 0) = 0.$$

(Tu sta $(-1, 0)$ in $(1, 0)$ končna in začetna točka na krivulji $\mathbf{K}$.)

4 Kolokviji 2018/19

4.1 1. Kolokvij

1. Kolokvij iz Matematike 2
15. november 2018

1. **[12 točk]** V vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 sta dani podmnožici

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(-1)\},$$
$$W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : (p(1))^2 = (p(-1))^2\}.$$

   (a) Ali je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$? Natančno utemelji! Če je, poišči bazo za V in določi $\dim(V)$.

   (b) Ali je W vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$? Natančno utemelji! Če je, poišči bazo za W in določi $\dim(W)$.

Rešitev: (a) Vzemimo polinoma $p, q \in V$, tj. polinoma p in q, da velja $p(1) = p(-1)$ in $q(1) = q(-1)$. Ali je podmnožica V zaprta za linearne kombinacije? Preverimo; za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) = (\alpha p + \beta q)(-1)$$

tj. za polinom $\alpha p + \beta q$ prav tako velja lastnost za polinome iz V. Podmnožica V je torej vektorski podprostor.

Zapišimo polinom $p \in \mathbb{R}_3[x]$ kot $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Če naj bo $p \in V$, mora veljati $p(1) = p(-1)$ oziroma $a + b + c + d = -a + b - c + d$. Od tod sledi $a = -c$; $b, c, d \in \mathbb{R}$ pa so lahko poljubni. Polinom $p \in V$ ima torej zapis $p(x) = -cx^3 + bx^2 + cx + d$ in baza za V je $B_V = \{x^3 - x, x^2, 1\}$, $\dim(V) = 3$.

(b) Podmnožica W *ni* vektorski podprostor. Polinoma $p_1(x) = 1$ in $p_2(x) = x$ sta namreč vsebovana v W, vendar polinom $(p_1 + p_2)(x) = x + 1$ ni vsebovan v W.

2. **[14 točk]** Naj bo $S \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$ vektorski podprostor vseh 2×2 simetričnih matrik. Za bazo S vzemimo $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$. Definirajmo še matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Preveri, da je $PXP \in S$, če je $X \in S$. (Oziroma: Če je X simetrična, potem je tudi PXP simetrična.)

   (b) Naj bo $\psi\colon S \to S$ dana s $\psi(X) = PXP$. Prepričaj se, da je ψ linearna preslikava.

   (c) Poišči matriko, ki pripada ψ glede na bazo $\mathcal{B}$.

   (d) Poišči bazi za $\operatorname{im}(\psi)$ ter $\ker(\psi)$.

Rešitev: (a) Ker velja $P^\mathsf{T} = P$ in $X^\mathsf{T} = X$ (saj je $X \in S$), sledi

$$(PXP)^\mathsf{T} = P^\mathsf{T} X^\mathsf{T} P^\mathsf{T} = PXP,$$

tj. $PXP \in S$.

(b) Preverimo, da ψ ohranja linearne kombinacije. Velja

$$\psi(\alpha X + \beta Y) = P(\alpha X + \beta Y)P = \alpha PXP + \beta PYP = \alpha\psi(X) + \beta\psi(Y),$$

ψ je torej linearna.

(c) Poračunamo, v kaj ψ preslika matrike baze $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\phi(E_{11}) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{22} - (E_{12} + E_{21}) \\
\phi(E_{22}) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{22} - (E_{12} + E_{21}) \\
\phi(E_{12} + E_{21}) &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = -2E_{11} - 2E_{22} + 2(E_{12} + E_{21})
\end{aligned}$$

Matrika, ki pripada ψ je torej

$$A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Po Gaussovi eliminaciji na A_ψ dobimo

$$A_\psi \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stolpci A_ψ so torej vsi linearno odvisni od prvega stolpca, zato je v bazi $C(A_\psi)$ le stolpec $[1, 1, -1]^\mathsf{T}$, pripadajoča matrika v S pa je ravno $P = E_{11}+E_{22}-(E_{12}+E_{21})$, torej $B_{\mathrm{im}\psi} = \{P\}$.

Iz prve vrstice v reducirani stopničasni obliki matrike A_ψ sledi, da je matrika

$$\alpha E_{11} + \beta E_{22} + \gamma(E_{12} + E_{21}) \in \ker\phi$$

natanko takrat, ko je $\alpha + \beta - 2\gamma = 0$ oziroma $\alpha = 2\gamma - \beta$. Matrike v $\ker\psi$ so torej oblike

$$(2\gamma - \beta)E_{11} + \beta E_{22} + \gamma(E_{12} + E_{21}).$$

Baza za $\ker\psi$ je torej

$$B_{\ker\psi} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. **[14 točk]** Vektorji $\mathbf{a} = [-1, 1, 0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = [1, -1, 1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{c} = [0, 1, -1]^\mathsf{T}$ tvorijo bazo $\mathcal{D} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$. Linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je določena s

$$\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \quad \phi(\mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \phi(\mathbf{c}) = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

(a) Zapiši matriko, ki pripada ϕ v bazi $\mathcal{D}$.

(b) Ali lahko ϕ diagonaliziramo?

(c) Zapiši matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

Rešitev: (a) $A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Ker je A_ϕ zgornje trikotna, so njene lastne vrednosti na diagonali. Lastne vrednosti ϕ so torej $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. Rang matrike

$$A_\phi - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je očitno enak 2, zato je lastni podprostor ϕ za lastno vrednost $\lambda_{2,3} = 1$ dimenzije $1 = 3 - 2$. Pri lastni vrednosti $\lambda_{2,3}$ torej dobimo (do linearne odvisnosti) le en lastni vektor in ϕ ne moremo diagonalizirat.

(c) Hitro lahko opazimo

$$\mathbf{i} = \mathbf{b} + \mathbf{c}\ ,\ \ \mathbf{j} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\ \text{ in }\ \mathbf{k} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Iz linearnosti ϕ sedaj dobimo

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{i}) &= \phi(\mathbf{b}) + \phi(\mathbf{c}) = -\mathbf{a} + \mathbf{b} = [1, 0, -1]^\mathsf{T}, \\ \phi(\mathbf{j}) &= \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b}) + \phi(\mathbf{c}) = \mathbf{c} = [0, 1, -1]^\mathsf{T}, \\ \phi(\mathbf{k}) &= \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b}) = -\mathbf{b} = [-1, 1, -1]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Matrika, ki pripada ϕ glede na standarno bazo $\mathcal{S} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ je torej

$$A_{\phi,\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.2 2. Kolokvij

2. test iz Matematike 2
13. december 2018

1. **[12 točk]** Linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ najprej zrcali preko ravnine $x - z = 0$, nato pa zrcali še preko ravnine $x + y = 0$.

   (a) Utemelji, da je ϕ izometrija.

   (b) Izberi si bazo za $\mathbb{R}^3$ in zapiši matriko, ki pripada ϕ v tej bazi.

   (c) Natančno klasificiraj izometrijo ϕ.

   Rešitev: (a) Ker je ϕ kompozitum dveh zrcaljenj, ki sta izometriji, je tudi ϕ izometrija.
   (b) Zapišimo matriko za ϕ kar v standardni bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$. Uporaba obeh zrcaljenj bazne vektorje preslika tako:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &\mapsto \mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} &\mapsto \mathbf{j} \mapsto -\mathbf{i}, \\ \mathbf{k} &\mapsto \mathbf{i} \mapsto -\mathbf{j}. \end{aligned}$$

   Matrika, ki pripada ϕ v standardni bazi, je torej

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (c) Karakteristični polinom ϕ je $\Delta_\phi(\lambda) = \det(A_\phi - \lambda I) = \lambda^3 - 1$, ta pa ima ničle

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = e^{\pm 2\pi i/3}.$$

   Gre torej za vrtež. Lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je $\mathbf{v}_1 = [1, -1, 1]^\mathsf{T}$, to je os vrtenja. Kot vrtenja je (do predznaka) $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

2. **[14 točk]**

   (a) Razvij funkcijo
$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$
   v Taylorjevo vrsto okoli $x_0 = 0$.

   (b) Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n}\ ?$$

   (c) Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}.$$

Rešitev: (a) Če v

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

vstavimo $t = x^2$, dobimo

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Po množenju zadnje enakosti z x pa še

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}.$$

(b) Vrsta za $f(x)$ konvergira za $x \in (-1,1)$, zato tudi vrsta za $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ konvergira za $x \in (-1,1)$.

(c) Imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ker je

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},$$

sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n} = \frac{20}{9}.$$

3. **[14 točk]** Funkcija dveh spremenljivk g ima predpis

$$g(x,y) = \sqrt{x^2 + y\cos(y)}.$$

(a) Poišči enačbo tangentne ravnine na graf funkcije g v točki $T(1,0,g(1,0))$.

(b) Z uporabo linearne aproksimacije za g določi približno vrednost izraza

$$\sqrt{0.9^2 + 0.1 \cdot \cos(0.1)}.$$

(c) V kateri smeri funkcija g v točki $(x_0,y_0) = (1,0)$ najhitreje narašča?

Rešitev: Pripravimo si oba prva parcialna odvoda g:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y\cos(y)}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\cos(y) - y\sin(y)}{2\sqrt{x^2 + y\cos(y)}}.$$

Linearna aproksimacija za g okrog $(x_0,y_0) = (1,0)$ je torej

$$g(x,y) \doteq g(1,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)(y-0) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}y.$$

(a) Iz Linearne aproksimacije dobimo $z = x + \frac{1}{2}y$. Ko to preuredimo, dobimo enačbo tangentne ravnine skozi $T(1,0,1)$:

$$2x + y - 2z = 0.$$

(b) V linearno aproksimacijo vstavimo $(x,y) = (0.9, 0.1)$ in dobimo

$$g(0.9, 0.1) \doteq 1 - 0.1 + 0.05 = 0.95.$$

(c) V smeri gradienta v tej točki, torej

$$(\operatorname{grad} g)(1,0) = \begin{bmatrix} g_x(1,0) \\ g_y(1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

4.3 3. Kolokvij

3. test iz Matematike 2
17. januar 2019

1. **[12 točk]** Poišči in klasificiraj vse stacionarne točke funkcije

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz^2 + xy + x - y.$$

Rešitev: Stacionarne točke so rešitve sistema $(\operatorname{grad} f)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, v našem primeru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2z^2 + y + 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + x - 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -4xz = 0. \end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe dobimo $x = 0$ ali $z = 0$. Če $x = 0$, iz 2. enačbe sledi $y = 1/2$ in nato iz prve še $z = \pm\sqrt{3}/2$. Imamo že dve stacionarni točki $T_{1,2}(0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. V primeru $z = 0$ pa iz prvih dveh enačb dobimo linearen sistem dveh enačb z dvema neznankama, ki ima rešitev $x = -1$, $y = 1$. Imamo še tretjo stacionarno točko $T_3(-1, 1, 0)$.

Tip teh stacionarnih točk bomo določili z uporabo Hessejeve matrike f. V splošnem je:

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4z \\ 1 & 2 & 0 \\ -4z & 0 & -4x \end{bmatrix}.$$

V $T_{1,2}$ dobimo

$$Hf\left(0, \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mp 2\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 0 \\ \mp 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Glavne poddeterminante te matrike so po vrsti 2, 3 in -24. Po Sylvestrovem kriteriju so torej lastne vrednosti te matrike različno predznačene in točki $T_{1,2}$ sta sedlasti točki.

V T_3 pa dobimo

$$Hf(-1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Glavne poddeterminante so po vrsti 2, 3 in 12. Po Sylvestrovem kriteriju so vse lastne vrednosti $Hf(-1, 1, 0)$ pozitivne in T_3 je lokalni minimum.

2. **[14 točk]** Poišči točke na implicitno dani krivulji z enačbo

$$x^4 + y^4 = x^2y^2 + 1,$$

ki so najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča. **Rešitev:** Iščemo maksimum (kvadrata) razdalje od izhodišča pri vezi, ki je dana z zgornjo enačbo. Funkcija, ki jo želimo maksimizirati je torej

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

vez pa zapišemo v obliki

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - x^2y^2 - 1 = 0.$$

Pripadajoča Lagrangeova funkcija je

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x^4 + y^4 - x^2y^2 - 1).$$

Poiščimo stacionarne točke L:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda(4x^3 - 2xy^2) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda(4y^3 - 2x^2y) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^4 + y^4 - x^2y^2 - 1) = 0.$$

Iz prve enačbe sledi bodisi $x = 0$, bodisi $\frac{1}{\lambda} = 2x^2 - y^2$. Podobno sledi iz druge enačbe bodisi $y = 0$, bodisi $\frac{1}{\lambda} = 2y^2 - x^2$. V primeru $x = 0$ iz tretje enačbe dobimo $y = \pm 1$, v primeru $y = 0$ pa iz tretje enačbe dobimo $x = \pm 1$. Poiskali smo že 4 stacionarne točke: $T_{1,2}(0, \pm 1)$ in $T_{3,4}(\pm 1, 0)$. Še $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ upoštevajmo; dobimo $3x^2 - 3y^2 = 0$ oziroma $y^2 = x^2$. Ko to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo še vse štiri možne kombinacije $x, y = \pm 1$ in imamo še 4 stacionarne točke $T_{5,6,7,8}(\pm 1, \pm 1)$.

Vrednost f v $T_{1,2,3,4}$ je enaka 1, vrednost f v $T_{5,6,7,8}$ pa je enaka 2. Od izhodišča so torej najbolj oddaljene točke $T_{5,6,7,8}$, ki so na razdalji $\sqrt{2}$.

3. **[14 točk]** Vektorski polji $\mathbf{F}, \mathbf{G} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sta dani s predpisoma

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{G}(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Ali je katero od polj $\mathbf{F}$ ali $\mathbf{G}$ gradientno? Če je, poišči skalarni potencial polja.

(b) Izračunaj krivuljna integrala

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{in} \quad \int_{\mathbf{K}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s},$$

kjer je $\mathbf{K}$ pozitivno orientiran rob četrtine kroga $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$ in $y \geq 0$. ($\mathbf{K}$ je torej unija dveh daljic in krožnega loka.)

Rešitev: (a) Pišimo $\mathbf{F} = [P, Q]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{G} = [R, S]^\mathsf{T}$. Ker je $P_y = -2y \neq 2y = Q_x$, polje $\mathbf{F}$ *ni* gradientno. Ker je $R_y = 2x = S_x$, je polje $\mathbf{G}$ gradientno.

Skalarni potencial $\mathbf{G}$ je

$$g(x, y) = \int R\, dx = \int 2xy\, dx = x^2y + C(y).$$

Funkcijo $C(y)$ bomo določili iz $g_y = S$:

$$g_y(x, y) = x^2 + C'(y) = x^2 - y^2,$$

od koder sledi $C'(y) = -y^2$ oziroma $C(y) = -y^3/3 + D$. Vzamemo lahko kar $D = 0$ in imamo skalarni potencial $\mathbf{G}$:

$$g(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3}.$$

(b) Ker je $\mathbf{G}$ gradientno, je njegov integral vzdolž sklenjene krivulje $\mathbf{K}$ enak 0, tj.

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Integral $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ bomo poračunali z uporabo Greenove formule. Velja

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\, dxdy = \iint\limits_D 4y\, dxdy,$$

kjer je D zgoraj opisana četrtina kroga. V polarnih koordinatah dobimo:

$$\iint\limits_D 4y\, dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 4r \sin\varphi \cdot r\, dr = 4 \left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \right) \left(\int_0^2 r^2\, dr \right) = \frac{32}{3}.$$

4.4 1. Popravni Kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
25. januar 2019

1. Definiramo preslikavo $\phi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom

$$\phi(p)(x) = (xp(x))' + p(1)$$

   (a) Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.

   (b) Zapiši matriko linearne preslikave ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}_2[x]$.

   (c) Določi lastne vrednosti ϕ. Ali je možno ϕ diagonalizirati?

Rešitev: (a) Linearnost preverimo direktno:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha p + \beta q)(x) &= (x(\alpha p + \beta q)(x))' + (\alpha p + \beta q)(1)\\ &= \alpha(xp)'(x) + \beta(xq)'(x) + \alpha p(1) + \beta q(1)\\ &= \alpha((xp(x))' + p(1)) + \beta((xq(x))' + q(1)) = \alpha\phi(p)(x) + \beta\phi(q)(x),\end{aligned}$$

kar pomeni $\phi(\alpha p + \beta q) = \alpha\phi(p) + \beta\phi(q)$.
(b) Poračunamo:

$$\begin{aligned}\phi(1) &= (x\cdot 1)' + 1 = 2,\\ \phi(x) &= (x\cdot x)' + 1 = 2x + 1,\\ \phi(x^2) &= (x\cdot x^2)' + 1 = 3x^2 + 1.\end{aligned}$$

Matrika, ki pripada ϕ v standardni bazi $\{1, x, x^2\}$ je torej

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

(c) Ker je matrika A_ϕ zgornje trikotna, so njene lastne vrednosti na diagonali. Lastne vrednosti ϕ so torej $\lambda_{1,2} = 2$ in $\lambda_3 = 3$. Preslikavo ϕ bomo lahko digonalizirali, če ima pri (dvojni) lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$ dva linearno neodvisna lastna polinoma. To pa ne drži, saj je rang matrike $A_\phi - 2I$ enak 2, zato je lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti 2, dimenzije $\dim(\mathbb{R}_2[x]) - \mathrm{rang}(A_\phi - 2I) = 3 - 2 = 1$. Preslikave ϕ ne moremo diagonalizirati.

2. Funkcija g ima predpis

$$g(x) = x\sin(x)$$

   (a) Razvij $g(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli $x = 0$ in določi konvergenčno območje.

   (b) Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Rešitev: (a) Poznamo Taylorjevo vrsto za $\sin(x)$ okrog $x = 0$, ta je

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Taylorjeva vrsta za $x\sin(x)$ okrog $x = 0$ je torej

$$x\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}.$$

Ta vrsta konvergira tam, kjer konvergira vrsta za $\sin(x)$ okrog $x = 0$, torej za vse $x \in \mathbb{R}$.
(b) Odvod zgornje vrste za $x\sin(x)$ je

$$(x\sin(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ker je $(x\sin(x))' = \sin(x) + x\cos(x)$, dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{2}(\sin(\pi) + \pi\cos(\pi)) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Poišči stacionarne točke funkcije

$$f(x, y, z) = x^2yz - x^3 - 2y^2 - 2z^2 + 3x$$

in jih klasificiraj.

Rešitev: Stacionarne točke so ničle gradienta, le-te pa so rešitve spodnjega sistema enačb:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xyz - 3x^2 + 3 = 0, \\ f_y &= x^2z - 4y = 0, \\ f_z &= x^2y - 4z = 0. \end{aligned}$$

Iz druge in tretje enačbe dobimo $\frac{x^2}{4} = \frac{y}{z} = \frac{z}{y}$ oziroma $y^2 = z^2$ ali $z = \pm y$. Pravzaprav kar $z = y$, saj mora biti kvocient $\frac{z}{y}$ enak $\frac{x^2}{4}$, tj. pozitiven. Če upoštevamo $z = y$ nam ostane sistem

$$\begin{aligned} 2xy^2 - 3x^2 + 3 &= 0, \\ (x^2 - 4)y &= 0. \end{aligned}$$

V primeru $y = 0$ iz prve enačbe dobimo $3x^2 - 3 = 0$, ki ima rešitvi $x = \pm 1$. V primeru $y \neq 0$ pa iz druge enačbe sledi $x^2 - 4 = 0$ oz. $x = \pm 2$, kar (zaradi prve enačbe) pomeni $\pm 4y^2 - 9 = 0$ oz. $y^2 = \pm\frac{9}{4}$. Le pri $x = 2$ dobimo rešitvi $y = \pm\frac{3}{2}$. Poiskali smo 4 stacionarne točke: $T_1(-1, 0, 0)$, $T_2(1, 0, 0)$, $T_3(2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ in $T_4(2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Hessejeva matrika f je

$$H_f = \begin{bmatrix} 2yz - 6x & 2xz & 2xy \\ 2xz & -4 & x^2 \\ 2xy & x^2 & -4 \end{bmatrix},$$

le-ta pa je v stacionarnih točkah $T_{1,2,3,4}$ enaka

$$H_f(-1,0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad H_f(1,0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$
$$H_f(2,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & -6 & -6 \\ -6 & -4 & 4 \\ -6 & 4 & -4 \end{bmatrix}, H_f(2,\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & 6 & 6 \\ 6 & -4 & 4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Iz Sylvestrovega kriterija (za pozitivno definitnost matrike) sedaj sledi, da je T_1 lokalni maksimum, točke T_2, T_3 in T_4 pa so sedla.

4. Izračunaj dvojni integral

$$\iint_D (x^3 + xy^2)dxdy,$$

kjer je D krog s polmerom 3 in s središčem v $(0,0)$.

Rešitev: V polarnih koordinatah je $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ in $\det(J\mathbf{F}) = r$, naš integral pa postane

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^3 + xy^2)dxdy &= \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} \left(r^3\cos^3\phi + r^3\cos\phi\sin^2\phi\right) r\,d\phi \\
&= \left(\int_0^3 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos\phi\,\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1}\,d\phi\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

saj je $\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi = 0$.

4.5 2. Popravni kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
4. februar 2019

1. Naj bo $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Preslikava $\theta\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ ima predpis

$$\theta(X) = AXA^{-1} + X.$$

   (a) Preveri, da je θ linearna preslikava.

   (b) Zapiši matriko te linearne preslikave v standardni bazi $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (c) Ali je 2 lastna vrednost θ? Če je, kaj je pripadajoča lastna matrika? Ali lahko θ diagonaliziramo?

Rešitev: (a) Ker velja

$$\begin{aligned}\theta(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y)A^{-1} + (\alpha X + \beta Y) = \alpha AXA^{-1} + \beta AYA^{-1} + \alpha X + \beta Y = \\ &= \alpha(AXA^{-1} + X) + \beta(AYA^{-1} + Y) = \alpha\,\theta(X) + \beta\,\theta(Y),\end{aligned}$$

je θ linearna preslikava.
(b) Najprej poračunamo $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Potem je

$$\begin{aligned}
\theta(E_{11}) &= \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right],\\
\theta(E_{12}) &= \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right],\\
\theta(E_{21}) &= \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right],\\
\theta(E_{22}) &= \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Matrika, ki pripada θ je torej

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Ker velja $\theta(I) = I + I = 2I$, je 2 lastna vrednost θ s pripadajočo lastno matriko $I = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.
Z vprašanjem o diagonalizaciji bo nekaj več dela. Karakteristični polinom θ je

$$\Delta_\theta(\lambda) = \det(A_\theta - \lambda I) = (2-\lambda)^4,$$

kar pomeni, da je $\lambda_{1,2,3,4} = 2$ štirikratna lastna vrednost θ. Ker je $\operatorname{rang}(A_\theta - 2I) = 2$, je $\dim(\ker(\theta - 2\cdot\mathrm{id})) = 4 - 2 = 2$, torej θ ne moremo diagonalizirat.

2. Funkcija g je vsota potenčne vrste

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{3^k}.$$

   (a) Določi območje konvergence zgornje potenčne vrste.

   (b) Eksplicitno izrazi funkcijo g — vrsto seštej.

(c) Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{3^k}.$$

Rešitev: (a) Najprej uporabimo kvocientni kriterij

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)x^k 3^k}{kx^{k-1}3^{k+1}}\right| = |x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{3k} = \frac{|x|}{3}$$

in iz $\frac{|x|}{3} < 1$ dobimo $x \in (-3,3)$. Ko robni točki tega intervala, $x = \pm 3$, vstavimo v našo potenčno vrsto, dobimo vrsti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{3} \quad \text{in} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3},$$

ki ne konvergirata (saj limita členov seštevanih zaporedij ni 0). Celotno območje konvergence je torej odprt interval $(-3,3)$.

(b) Ker je

$$\int g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{kx^{k-1}}{3^k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{3^k k} + C = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k + C = \frac{1}{1-x/3} + C = \frac{3}{3-x} + C,$$

je

$$g(x) = \left(\frac{3}{3-x} + C\right)' = \frac{3}{(3-x)^2}.$$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{3^k} = g(-1) = \frac{3}{16}$.

3. Poišči točke na implicitno dani krivulji z enačbo

$$x^4 + y^4 = x^2y^2 + 3,$$

ki so najbolj oddaljene od y-osi.

Rešitev: Razdaljo od y-osi direktno merimo z $|x|$, vendar bomo raje uporabili kvadrat razdalje, x^2, da bomo funkcije znali odvajat. Funkcija, ki jo želimo maksimizirati, je torej

$$f(x,y) = x^2,$$

funkcija, ki predstavlja vez pa

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y^2 - 3.$$

Pripadajoča Lagrangeova funkcija je

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - \lambda(x^4 + y^4 - x^2y^2 - 3).$$

Njene stacionarne točke so rešitve sistema

$$\begin{aligned} L_x &= 2x - \lambda(4x^3 - 2xy^2) = 0, \\ L_y &= -\lambda(4y^3 - 2x^2y) = 0, \\ L_\lambda &= -(x^4 + y^4 - x^2y^2 - 3) = 0. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $2\lambda y(2y^2 - x^2) = 0$, kar pomeni

$$\lambda = 0 \text{ ali } y = 0 \text{ ali } 2y^2 - x^2 = 0.$$

Če je $\lambda = 0$, iz prve enačbe sledi $x = 0$ in nato iz tretje enačbe še $y = \pm\sqrt[4]{3}$. Dobili smo prvi dve stacionarni točki $T_{1,2}(0, \pm\sqrt[4]{3})$.

Če je $y = 0$, iz tretje enačbe dobimo $x = \pm\sqrt[4]{3}$ in imamo še $T_{3,4}(\pm\sqrt[4]{3}, 0)$.

Če je $2y^2 - x^2 = 0$, potem $x^2 = 2y^2$ (in zato $x^4 = (x^2)^2 = 4y^4$). Ko to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo

$$4y^4 + y^4 - 2y^4 - 3 = 3y^4 - 3 = 0,$$

zato $y = \pm 1$. Torej $x^2 = 2$ in $x = \pm\sqrt{2}$. Imamo še 4 stacionarne točke $T_{5,6,7,8}(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$.

Vrednosti funkcije f v teh stacionarnih točkah so (po vrsti): $0, 0, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2, 2, 2, 2$. Od y-osi so torej najbolj oddaljene točke $T_{5,6,7,8}$, ki so na razdalji $\sqrt{2}$ od y-osi.

4. Poišči koordinate masnega središča osmine krogle dane z

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$$

če je gostota konstantna, tj. $\rho(x, y, z) = 1$. (To je osmina krogle s polmerom 2 in s središčem v koordinatnem izhodišču, ki leži v I. oktantu.)

Rešitev: Ker je gostota enaka 1, je masa enaka prostornini osmine krogle s polmerom $R = 2$:

$$m = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi \cdot 8}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Koordinate masnega središča osmine krogle D dobimo iz:

$$x^* = \frac{1}{m} \iiint\limits_D x\,dxdydz,\ y^* = \frac{1}{m} \iiint\limits_D y\,dxdydz,\ z^* = \frac{1}{m} \iiint\limits_D z\,dxdydz.$$

Računali bomo v sfernih koordinatah

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\sin\theta, \\ y &= r\sin\phi\sin\theta, \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

za katere je $\det(J\mathbf{F}) = r^2 \sin\theta$. Zaradi simetrije je $x^* = y^* = z^*$. Računali bomo z^*, saj je pripadajoči integral najlažji. V sfernih koordinatah našo osmino krogle opišemo z mejami $r \in [0, 2]$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ter $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Torej

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{3}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \underbrace{r\cos\theta}_{=z} \cdot \underbrace{r^2\sin\theta}_{=\det(J\mathbf{F})}\ dr \\ &= \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \right) \left(\int_0^2 r^3\,dr \right) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(Integral po θ uženemo z novo spremenljivko $t = \sin\theta$.) Masno središče naše osmine krogle je torej v točki

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right).$$

4.6 3. Popravni kolokvij

Popravni kolokvij iz Matematike 2
23. avgust 2019

1. Definiramo preslikavo $\phi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom

$$\phi(p) = x^2 p''(x) + p(x+1)$$

   (a) Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.
   Rešitev: Preverimo, kaj ϕ naredi z linearno kombinacijo polinomov.

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha p + \beta q) &= x^2(\alpha p + \beta q)''(x) + (\alpha p + \beta q)(x+1) \\
&= x^2 \alpha p''(x) + x^2 \beta q''(x) + \alpha p(x+1) + \beta q(x+1) \\
&= (x^2 \alpha p''(x) + \alpha p(x+1)) + (x^2 \beta q''(x) + \beta q(x+1)) \\
&= \alpha\phi(p) + \beta\phi(q),
\end{aligned}$$

   kar pomen, da je res linearna.

   (b) Zapiši matriko linearne preslikave ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}_2[x]$.
   Rešitev: Če standardne bazne polinome za $\mathbb{R}_2[x]$ označimo z $p_1(x) = 1, p_2(x) = x$ in $p_3(x) = x^2$, lahko izračunamo

$$\begin{aligned}
\phi(p_1) &= 1 = p_1(x) \\
\phi(p_2) &= x + 1 = p_1(x) + p_2(x) \\
\phi(p_3) &= 3x^2 + 2x + 1 = 3p_3(x) + 2p_2(x) + p_1(x),
\end{aligned}$$

   od koder lahko direktno zapišemo matriko A, ki predstavlja ϕ v tej bazi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   (c) Določi lastne vrednosti ϕ. Ali je možno ϕ diagonalizirati?
   Rešitev: Takoj lahko preberemo lastne vrednosti z diagonale A: $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 3$. Za dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 1$ moramo določiti dimenzijo ničelnega prostora $N(A - I)$. Z Gaussovo eliminacijo hitro dobimo

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   torej imamo samo eno prosto spremenljivko in s tem $\dim(N(A - I)) = 1$. To pomeni, da A (in s tem ϕ) ni možno diagonalizirati.

2. Funkcija g ima predpis

$$g(x) = x \log(x+1)$$

   (a) Razvij $g(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli $x = 0$ in določi konvergentno območje.
   Rešitev: Poznamo vrsto za $\log(x+1)$ okoli $x = 0$,

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Vrsto za g dobimo, če to pomnožimo z x.

$$g(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n+1}$$

Vemo, da omenjena vrsta za $\log(x+1)$ absolutno konvergira za $|x| < 1$, torej je to konvergenčo območje tudi za $g(x)$. (To lahko seveda tudi neodvisno preverimo npr. s kvocientnim kriterijem).

(b) Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{3^n n}.$$

Rešitev: Opaziti je potrebno, da lahko nekaj podobnega tej vrsti dobimo z odvajanjem vrste za funkcijo $g(x)$ iz (a) točke. Označimo ta odvod z $h(x)$.

$$h(x) = g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} x^n$$

Če zdaj zapišemo izraz za $h(-2/3)$, dobimo

$$\begin{aligned} h(-2/3) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(n+1)}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{3^n n} \end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$h(x) = g'(x) = \log(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

Tako dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{3^n n} = -h(-2/3) = -\log(1/3) - \frac{-2/3}{1/3} = 2 + \log(3)$$

3. Naj bo

$$f(x,y) = \left((x-1)^2 + y^2\right)^2 + y^2 - (x-1)^2$$

Poišči točke na krivulji $f(x,y) = 0$, ki so najbolj oddaljene od y-osi.
Rešitev: Funkcija, ki jo hočemo maksimizirati, je $F(x,y) = x$ (pri pogoju $f(x,y) = 0$. Ustrezna Lagrangeova funkcija je torej

$$L(x,y,\lambda) = F(x,y) - \lambda f(x,y) = x - \lambda\left(\left((x-1)^2 + y^2\right)^2 + y^2 - (x-1)^2\right)$$

Izračunamo parcialne odvode L.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - \lambda\left(4\left((x-1)^2 + y^2\right)(x-1) - 2(x-1)\right) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\lambda\left(4\left((x-1)^2 + y^2\right)^2 y + 2y\right) = -y\lambda\left(4\left((x-1)^2 + y^2\right)^2 + 2\right) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -f(x,y) \end{aligned}$$

Potrebno je rešiti sistem grad $L = 0$. Ključna je druga enačba $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$: ker je izraz v oklepaju vedno strogo pozitiven, mora biti $y = 0$ ali $\lambda = 0$. Ne more veljati $\lambda = 0$, ker bi potem iz prve enačbe sledilo $\frac{\partial L}{\partial y} = 1$. Edine reštve ležijo torej na premici $y = 0$. To močno poenostavi tretjo enačbo $f(x, y) = 0$:

$$(x-1)^4 - (x-1)^2 = (x-1)^2(x-2)x = 0$$

Imamo tri rešitve te enačbe, vendar se primer $y = 0$ in $x - 1 = 0$ ne sklada s prvo enačbo. Ostaneta točki $(0, 0)$ ter $(2, 0)$, ki rešita vse tri enačbe (skupaj z $\lambda = \pm 1/2$). Od teh dveh točk je $(2, 0)$ najbolj oddaljena od y-osi.

4. Vektorsko polje $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ je definirano s predpisom

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(a) Preveri, da je $\mathbf{F}$ gradientno polje.
Rešitev: Z odvajanjem koordinatnih funkcij $\mathbf{F} = [U, V]^\mathsf{T}$ direktno preverimo, da velja $U_y = V_x$, kar je potreben pogoj, da polje gradientno. Sicer pa lahko tudi hitro vidimo, da je potencial tega polja

$$G(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(b) Izračunaj krivuljna integrala

$$\int_{\mathbf{K_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{in} \quad \int_{\mathbf{K_2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

kjer je $\mathbf{K_1}$ krožnica s polmerom 1 in središčem v $(0, 0)$, $\mathbf{K_2}$ pa krožnica s polmerom 1 in središčem v $(1, 1)$. V katerem primeru smemo uporabiti Greenovo formulo?
Rešitev: Polje $\mathbf{F}$ je definirano povsod v notranjosti krožnice $\mathbf{K_2}$, torej lahko uporabimo Greenove formulo in glede na $U_y - V_x = 0$, lahko takoj zapišemo

$$\int_{\mathbf{K_2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

V središču krožnice $\mathbf{K_1}$ pa $\mathbf{F}$ ni definirano, torej za ta primer ne moremo uporabiti Greenove formule. Lahko pa integral direktno izračunamo. Če izberemo običajno parametrizicjo krožnice $\mathbf{s}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $d\mathbf{s} = (-\sin(t), \cos(t))dt$, dobimo

$$\int_{\mathbf{K_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(t)}{1}(-\sin(t)) + \frac{\sin(t)}{1}\cos(t) \right) dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0.$$

5 Kolokviji 2019/20

5.1 1. Kolokvij

1. kolokvij iz Matematike 1 (28. november 2019)

1. **[25 točk]** Poišči matriko ranga 1, ki je v Frobeniusovi normi najbližja matriki

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

tj. tisto matriko $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ranga 1, za katero je število $\|X - K\|_{\mathrm{F}}$ najmanjše možno.

Rešitev: Po Eckart–Youngovem izreku lahko aproksimacijo ranga 1 dobimo iz singularnega razcepa matrike K. Ker je K simetrična, bo dovolj poiskati ortogonalno matriko V in diagonalno matriko D, da bo $K = VDV^{\mathsf{T}}$. V resnici iz V rabimo le lastni vektor za tisto lastno vrednost K, ki je po absolutni vrednosti največja.

Poiščimo najprej lastne vrednosti K:

$$\det(K - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

Tu smo od 3. vrstice odšteli 1. vrstico, nato pa prvemu stolpcu prišteli 3. stolpec. Ker je zadnja matrika bločno zgornje trikotna, dobimo:

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5) = 0.$$

Lastne vrednosti K so torej $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Ker iščemo aproksimacijo ranga 1, rabimo le lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = 5$. Tega lahko uganemo: Ker je vsota vsake vrstice K enaka 5, je $\mathbf{v}_1' = [1,1,1]^{\mathsf{T}}$ pripadajoč lastni vektor. Še normiramo ga in dobimo $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^{\mathsf{T}}$, to je tudi prvi stolpec matrike V. Matrika ranga 1, ki najbolje aproksimira K je torej

$$X = V\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^{\mathsf{T}} = 5\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} = \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. **[25 točk]** Ali je katera od matrik

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

pozitivno semidefinitna? Za tisto, ki je, izračunaj razcep Choleskega.

Rešitev: Pozitivno semidefinitnost lahko testiramo s Sylvestrovim kriterijem. Ker je determinanta glavne 2×2 podmatrike B negativna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

B *ni* pozitivno semidefinitna. Ker so vse determinante glavnih podmatrik A pozitivne,

$$4 > 0\ , \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \ \text{ in } \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 = 36 > 0,$$

je A pozitivno definitna.

Poiščimo razcep Choleskega matrike A. Pišimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^\mathsf{T} \\ \mathbf{b} & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

in

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\mathbf{b} & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A' - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ter

$$A'' = 10 - \frac{1}{1}(-1)(-1) = 9,$$

torej $L_3 = \sqrt{9} = 3$. Končno

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Za ta L velja $LL^\mathsf{T} = A$.

3. [**25 točk**] Naj bosta A in B matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Označimo $A \oplus B := A \otimes I_2 + I_2 \otimes B$. Ali lahko matriko $(A \oplus B)^3$ diagonaliziramo? Če je odgovor da, poišči diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P, da bo $(A \oplus B)^3 = PDP^{-1}$, če je odgovor ne, razloži, zakaj to ni mogoče.

Rešitev: Lastne vrednosti $A \oplus B$ so vsote lastnih vrednosti matrik A in B, pripadajoči lastni vektorji pa so Kroneckerjevi produkti lastnih vektorjev A in B. (To smo izpeljali na vajah.) Ker je $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4$, sta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -2$ lastni vrednosti A. Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{v}_1 = [1, 1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{v}_2 = [1, -1]^\mathsf{T}$. Ker je B zgornje trikotna, so njene lastne vrednosti na diagonali, torej sta $\mu_1 = 1$ in $\mu_2 = -1$ lastni vrednosti B. Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{u}_1 = [1, -1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{u}_2 = [1, 0]^\mathsf{T}$. Lastne vrednosti $A \oplus B$ so torej

$$\lambda_1 + \mu_1 = 3,\ \lambda_1 + \mu_2 = 1,\ \lambda_2 + \mu_1 = -1 \text{ in } \lambda_2 + \mu_2 = -3.$$

4×4 matrika $A \oplus B$ ima torej 4 različne lastne vrednosti, kar pomeni, da jo lahko diagonaliziramo. Pripadajoči lastni vektorji so

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika $(A \oplus B)^3$ ima enake lastne vektorje, njene lastne vrednosti pa so tretje potence lastnih vrednosti matrike $A \oplus B$. Imamo torej

$$D = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} \text{ ter } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriko $(A \oplus B)^3$ lahko diagonaliziramo in velja $(A \oplus B)^3 = PDP^{-1}$.

4. **[25 točk]** V $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sta dani podmnožici

$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AX = XA^2\}$$
$$\text{ter } V := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AX = X^2 A\},$$

kjer je $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ali je katera od podmnožic U in V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$? Za vsako, ki je vektorski podprostor, poišči bazo in določi dimenzijo.

Rešitev: Naj bo $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ identična matrika. Velja

$$AI = I^2 A = IA = A,$$

vendar

$$2A = A(2I) \neq (2I)^2 A = 4A,$$

torej je $I \in V$, vendar $2I \notin V$. Podmnožica V zato ni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$, saj ni zaprta za množenje s skalarjem.

Kaj pa U? Vzemimo $X, Y \in U$, tj. taki 2×2 matriki U in V, da je $AX = XA^2$ ter $AY = YA^2$. Za linearno kombinacijo $\alpha X + \beta Y$ tedaj velja

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \alpha XA^2 + \beta YA^2 = (\alpha X + \beta Y)A^2,$$

tj. $\alpha X + \beta Y \in U$ in U je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Da poiščemo bazo za U, bomo najprej (parametrično) opisali elemente U. Pišimo $X = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Ker je $A^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, iz $AX = XA^2$ dobimo

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & a-b \\ -d & c-d \end{bmatrix}.$$

Edina rešitev tega sistema enačb pa je $a = b = c = d = 0$, tj. matrika X je v U natanko takrat, ko je $X = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Podmnožica U je torej trivialen (ničelni) podprostor, $U = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\}$. Baza za U je prazna množica $\mathcal{B}_U = \emptyset = \{\}$, $\dim U = 0$.

5.2 2. kolokvij

2. kolokvij iz Matematike 1 (21. januar 2020)

1. **[25 točk]** Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ ortonormirana baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Linearni izometriji $\phi, \psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na bazi $\mathcal{B}$ delujeta tako

$$\begin{array}{lll} \phi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}, & \phi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, & \phi(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \\ \psi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, & \psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, & \psi(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \end{array}$$

   (a) Zapiši matriki, ki pripadata ϕ in ψ v bazi $\mathcal{B}$. Klasificiraj ϕ in ψ kot izometriji.

   (b) Utemelji, da je $\psi \circ \phi$ izometrija, in zapiši matriko, ki ji pripada v bazi $\mathcal{B}$. Poišči realne lastne vrednosti $\psi \circ \phi$ in izrazi pripadajoče lastne vektorje v bazi $\mathcal{B}$.

Rešitev: (a) Matriki preberemo direktno iz definicij

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitro lahko tudi vidimo, da je $\det(A_\phi) = \det(A_\psi) = -1$, kar pomeni, da imata ϕ in ψ (vsaj) eno lastno vrednost -1. Tako vemo, da sta preslikavi zrcaljenji ali zrcalni rotaciji. Iz

$$\mathrm{tr}(A_\phi) = \mathrm{tr}(A_\psi) = 1 = -1 + 2\cos(\varphi),$$

kjer je φ kot zrcalne rotacije, lahko sklepamo, da $\varphi = 0$, kar pomeni, da sta ϕ in ψ zrcaljenji.

(b) Matriko A, ki predstavlja $\psi \circ \phi$, lahko dobimo z množenjem matrik $A_\psi A_\phi$, še hitreje pa direktno iz definicij

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Da je $\psi \circ \phi$ izometrija lahko utemeljimo s tem, da imamo kompozitum izometrij, ali pa da opazimo, da je A očitno ortogonalna matrika (in A predstavlja $\psi \circ \phi$ v ortonormirani bazi $\mathcal{B}$). Ker je $\det(A) = 1$, lahko sklepamo, da gre za rotacijo, iz

$$\mathrm{tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos(\varphi)$$

pa da gre za rotacijo za kot $\varphi = -\pi/3$. Os rotacije je lastni vektor (oz. podprostor) za lastno vrednost $\lambda_1 = 1$. Določimo jo lahko z Gaussovo eliminacijo na matriki

$$A - I \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

od koder lahko preberemo lastni vektor $\mathbf{v} = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$.

2. **[25 točk]** Poišči koordinate masnega središča homogenega telesa, ki je določeno z neenačbami

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ ,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \ \text{ in } z \geq 0.$$

(Koordinate masnega središča homogenega telesa D so dane z

$$x^* = \frac{1}{m}\iiint\limits_D x\,dxdydz,\ y^* = \frac{1}{m}\iiint\limits_D y\,dxdydz \text{ ter } z^* = \frac{1}{m}\iiint\limits_D z\,dxdydz,$$

kjer je $m = \iiint_D dxdydz$.)

Rešitev: Telo, ki ga opisujejo zgornje neenakosti bi lahko opisali tako: Iz zgornje polovice krogle s središčem v izhodišču in polmerom 2 izdolbemo zgornjo polovico krogle s (središčem v izhodišču in) polmerom 1. Računali bomo v sfernih koordinatah, v teh je telo dano z neenakostmi:

$$1 \le r \le 2\ ,\ \ 0 \le \phi \le 2\pi \ \text{ ter } \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

kar so hkrati meje za integracijo v sfernih koordinatah.

Masa je enaka

$$m = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^2\cos\theta\,dr = 2\pi\Big(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\Big)\Big(\int_1^2 r^2\,dr\Big) = 2\pi\cdot 1\cdot\frac{7}{3} = \frac{14\pi}{3}.$$

Zaradi simetrije (in homogenosti) bi pričakovali, da velja $x^* = y^* = 0$. Tudi direktno z integralom ni težko:

$$x^* = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r\cos\phi\cos\theta\cdot r^2\cos\theta\,dr = 0,$$

saj je $\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi = 0$. Podobno se zgodi z y^*. Tretja komponenta masnega središča je enaka

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r\sin\theta\cdot r^2\cos\theta\,dr \\ &= \frac{3}{14\pi}\cdot 2\pi\Big(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\Big)\Big(\int_1^2 r^3\,dr\Big) \\ &= \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4} = \frac{45}{56}, \end{aligned}$$

kjer smo $\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ izračunali z uvedbo nove spremenljivke $t = \sin\theta$ in dobili $\int_0^1 t\,dt$.

Masno središče telesa je torej v točki $T(0, 0, \frac{45}{56})$.

3. **[25 točk]** Za dana vektorja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ definiramo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x}.$$

   (a) Poišči stacionarne točke funkcije f.

   (b) Katere od dobljenih stacionarnih točk so lokalni maksimi? Katere so lokalni minimi?

Rešitev: (a) Stacionarne točke so tiste, v katerih je gradient enak $\mathbf{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\mathsf{T} + \mathbf{b}^\mathsf{T} = \mathbf{0}^\mathsf{T}.$$

Ta enačba ima rešitev $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$. To je tudi edina stacionarna točka f (oz. krajevni vektor stacionarne točke).

(b) Hessejeva matrika f je

$$H_f = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(2(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{b}\right) = 2I_n,$$

kjer je I_n identična matrika velikosti $n \times n$. Ta H_f je torej pozitivno definitna v stacionarni točki $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$, zato je ta točka lokalni minimum.

4. [**25 točk**] Funkcijo

$$f(x, y) = y - x$$

opazujemo na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}.$$

Poišči minimum funkcije f na območju D.

Rešitev: Zapišimo Lagrangeovo funkcijo

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = y - x - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(x^2 - y)$$

Izračunajmo še odvoda L po x in y.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -1 - 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2$$

Obravnavati je potrebno primere:

(i) $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 0$. Očitno tu ni rešitve, saj dobimo enačbi $-1 = 0$ in $1 = 0$.

(ii) $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 \neq 0$. Poleg enačb

$$-1 - 2\lambda_2 x = 0$$
$$1 + \lambda_2 = 0$$

imamo tu še pogoj $x^2 - y = 0$. Dobimo $\lambda_2 = -1, x = 1/2$ in $y = 1/4$. Ker je $\lambda_2 < 0$, ta rešitev izpolnjuje vse potrebne pogoje za minimum (ne vemo pa še, ali je to edina točka, ki izpolnjuje vse potrebne pogoje).

(iii) $\lambda_1 \neq 0$ in $\lambda_2 = 0$. Tokrat imamo Lagrangeove enačbe

$$-1 - 2\lambda_1 x = 0$$
$$1 - 2\lambda_1 y = 0$$

in pogoj $x^2 + y^2 = 2$. Dobimo dve rešitvi $(\lambda_1, x, y) = (\pm 1/2, \mp 1, \pm 1)$. Rešitev $(-1/2, 1, -1)$ ne leži v dopustnem območju, rešitev $(1/2, -1, 1)$ pa ne izpolnjuje pogoja $\lambda_1 \leq 0$.

(iv) $\lambda_1 \neq 0$ in $\lambda_2 \neq 0$. V tem primeru imamo enačbi

$$-1 - 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x = 0$$
$$1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$$

in pogoja $x^2 - y = 0$ ter $x^2 + y^2 = 2$. Že samo iz pogojev dobimo dve možnosti $(x, y) = (\pm 1, 1)$. Za primer $(-1, 1)$ dobimo $(\lambda_1, \lambda_2) = (1/2, 0)$, za primer $(1, 1)$ pa dobimo $(\lambda_1 = 2/5, \lambda_1 = -1/5)$. V obeh primerih imamo $\lambda_1 > 0$, kar pomeni, da tu ni minimuma (je pa maksimum v točki $(-1, 1)$.

Edina rešitev, ki zadošča vsem potrebnim pogojem je torej $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (1/2, 1/4, 0, -1)$, minimum f je v $(1/2, 1/4)$.

5.3 1. Računski izpit

Računski izpit iz Matematike 1

30. januar 2020

1. **[25 točk]** Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ je dana s predpisom

$$\phi(p)(x) = p(x) + xp'(x).$$

   a. **[5 točk]** Prepričaj se, da je ϕ linearna preslikava.

   b. **[10 točk]** Zapiši matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}_3[x]$.

   c. **[10 točk]** Poišči lastne vrednosti preslikave ϕ. Ali lahko ϕ diagonaliziramo?

2. **[25 točk]**

   a. **[10 točk]** Utemelji: Če sta λ in μ lastni vrednosti matrike A, potem je $\lambda(\lambda+\mu)$ lastna vrednost matrike $A \otimes A + A^2 \otimes I$.

   b. **[15 točk]** Naj bo $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $A \otimes A + A^2 \otimes I$.

3. **[25 točk]** Izračunaj dvakratni integral

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y)\, dy \right) dx.$$

4. **[25 točk]** Delec z maso m zaprt v pravokotnik s stranicama dolžin x in y ima na neizotropni ravnini energijo osnovnega stanja dano z

$$E(x,y) = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} \right).$$

   Kolikšni naj bosta dolžini stranic tega pravokotnika, da bo pri njegovi fiksni ploščini $A_0 = xy > 0$ energija osnovnega stanja minimalna?
   Namig: Poišči minimum funkcije $E(x,y)$ pri pogoju $xy = A_0$.

5.4 2. Računski izpit

Računski izpit iz Matematike 1

13. februar 2020

1. **[25 točk]** Naj bo $\mathbf{a} = [1, -1]^\mathsf{T}$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je dana s predpisom
$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\mathbf{x}^\mathsf{T} - \mathbf{x}\mathbf{a}^\mathsf{T}.$$

   a. **[5 točk]** Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.
   Rešitev: Vzemimo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ter računamo po definiciji
$$\begin{aligned}\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})^\mathsf{T} - (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})\mathbf{a}^\mathsf{T} \\ &= \alpha(\mathbf{a}\mathbf{u}^\mathsf{T} - \mathbf{u}\mathbf{a}^\mathsf{T}) + \beta(\mathbf{a}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \mathbf{v}\mathbf{a}^\mathsf{T}) \\ &= \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})\end{aligned}$$

   b. **[10 točk]** Zapiši matriko, ki predstavlja ϕ v standardnih bazah $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
   Rešitev: Poračunamo sliki standardnih baznih vektorjev $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ in jih izrazimo s standardnimi baznimi vektorji $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = E_{12} - E_{21} \\ \phi(\mathbf{e}_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = E_{12} - E_{21}\end{aligned}$$
   Matriko, ki predstavlja ϕ v standardni bazi, je potem
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   c. **[10 točk]** Poišči bazi za jedro $\ker(\phi)$ in sliko $\operatorname{im}(\phi)$.
   Rešitev: Po Gaussovi eliminaciji dobimo
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   od koder lahko hitro ugotovimo, da je baza za jedro $\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$, baza za sliko pa $\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$.

2. **[25 točk]** Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. [**5 točk**] Diagonaliziraj matriko A.
Rešitev: Karakteristčni polinom je $(1-\lambda)^2 - 9$. Za lastne vrednosti in lastne vektorje dobimo

$$\lambda_1 = 4 \quad : \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad : \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b. [**5 točk**] Na kratko utemelji, zakaj je matrika $A \oplus A$ simetrična (tu je mišljena Kroneckerjeva vsota).
Rešitev: Vemo, da za poljubne matrike A in B velja

$$(A \otimes B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} \otimes B^\mathsf{T}$$

Potem lahko za dan A zapišemo

$$(A \oplus A)^\mathsf{T} = (A \otimes I + I \otimes A)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} \otimes I^\mathsf{T} + I^\mathsf{T} \otimes A^\mathsf{T} = A \otimes I + I \otimes A = A \oplus A,$$

ker sta A in I simetrični matriki.

c. [**15 točk**] Določi matriko ranga 1, ki se v Frobeniusovi normi najmanj razlikuje od matrike $A \oplus A$.
Opozorilo : Prosimo, da ne računate matrike $A \oplus A$. Kdor bo eksplicitno računal matriko $A \oplus A$, dobi -5 točk.
Rešitev: Ker je $A \otimes A$ simetrična matrika, so singularne vrednosti in singularni vektorji matrike $A \oplus A$ enaki lastnim vrednostim in (normiranim) lastnim vektorjem. Za aproksimacijo ranga 1 potrebujemo največjo lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor, vemo pa, da so lastne vrednosti $A \otimes A$ vsote dveh lastnih vrednosti matrike A, lastni vektorji pa Kroneckerjevi produkti lastnih vektorjev A. Tako lahko ugotovimo, da je največja lastna vrednost $A \otimes A$ enaka $\lambda_1 + \lambda_1 = 8$, pripadajoč lastni vektor pa

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za najboljšo aproksimacijo ranga 1 tako dobimo

$$8 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Faktor 1/2 se pojavi, ker je lastni vektor $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1$ potrebno normirati, da dobimo singularni vektor.

3. [**25 točk**] Izračunaj volumen in masno središče območja

$$D = \{(x, y, z) \, : \, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2\}$$

Namig: Uporabi cilindrične koordinate. **Rešitev:** V cilindričnih koordinatah lahko območje D opišemo kot

$$D = \{(\phi, r, z) \; : \; 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le 1, 0 \le z \le r - r^2\},$$

Prostornino lahko potem izračunamo z integralom (kjer upoštevamo, da je $|J| = r$)

$$\begin{aligned} V = \int_D 1 \, dxdydz &= \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{r-r^2} r dz dr d\phi \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 r^2 - r^3 dr = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

Za x-koordinato težišča lahko zapišemo integral

$$\begin{aligned} x^* = \frac{1}{m} \int_D x \, dxdydz &= \frac{24}{\pi} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{r-r^2} r^2 \cos(\phi) dz dr d\phi \\ &= \frac{12\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 r^3 - r^4 dr = \frac{3\sqrt{2}}{5\pi}, \end{aligned}$$

kjer lahko zaradi homogenosti enačimo $m = V$. Zaradi simetrije lahko sklepamo, da je $y^* = x^*$, za z-koordinato težišča pa imamo integral

$$\begin{aligned} z^* = \frac{1}{m} \int_D z \, dxdydz &= \frac{24}{\pi} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{r-r^2} r z dz dr d\phi \\ &= 3 \int_0^1 r \cdot \frac{(r - r^2)^2}{2} dr = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Pri vseh integralih smo nekaj vmesnih korakov seveda izpustili.

4. **[25 točk]** Dana sta vektorja $\mathbf{n}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Izmed vektorjev $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki ležijo na hiperravnini z enačbo $\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$, želimo poiskati tisti vektor, ki se po evklidski normi najmanj razlikuje od $\mathbf{a}$ (torej tistega, za katerega bo $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$ minimalen).

   a. **[10 točk]** Odvajaj ustrezno Lagrangeovo funkcijo.
   Rešitev: Lagrangeova funkcija za ta problem je

   $$L(\mathbf{x}, \lambda) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 - \lambda(\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x} - 1)$$

   Odvod po $\mathbf{x}$ je

   $$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\mathsf{T} - \lambda \mathbf{n}^\mathsf{T}$$

   Odvod po λ je seveda

   $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$

   kar vemo že vnaprej.

b. **[15 točk]** Izpelji formulo za iskani $\mathbf{x}$ (v formuli seveda nastopata $\mathbf{n}$ in $\mathbf{a}$).
Rešitev: Iz enačbe $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$ lahko $\mathbf{x}$ izrazimo kot

$$\mathbf{x} = \frac{\lambda}{2}\mathbf{n} + \mathbf{a}$$

Če ta izraz vstavimo v pogoj $\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$, dobimo

$$\frac{\lambda}{2}\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n} + \mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{a} = 1,$$

od koder lahko λ izrazimo kot

$$\lambda = 2 \cdot \frac{1 - \mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{a}}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}}$$

Pri tem smemo deliti z $\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n} = \|\mathbf{n}\|^2$, ker je to število (in očitno tudi $\|\mathbf{n}\| \neq 0$, saj sicer ne more veljati $\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$), ne moremo pa v običajnem smislu deliti z $\mathbf{n}$ ali $\mathbf{n}^\mathsf{T}$, ker sta to vektorja. Končni rezultat je potem

$$\mathbf{x} = \frac{1 - \mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{a}}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{a}$$

5.5 3. Računski izpit

Računski izpit iz Matematike 1

7. avgust 2020

1. **[35 točk]** Zapišimo polinom $p \in \mathbb{R}_2[x]$ kot $p(x) = ax^2 + bx + c$. Preslikavi $\eta\colon \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}_2[x]$ in $\theta\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ sta dani s predpisoma

$$\eta(X) = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ \theta(p) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}.$$

   a. **[10 točk]** Preveri, da je η linearna preslikava. (Linearnosti θ *ni* potrebno preverjati.)
   Rešitev: Preveriti moramo, da η ohranja linearne kombinacije. Označimo $\mathbf{a}^\mathsf{T} = [x^2, x, 1]$ in $\mathbf{b}^\mathsf{T} = [1, 1, 1]$. Potem je $\eta(X) = \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{b}$ in velja

$$\eta(\alpha X + \beta Y) = \mathbf{a}^\mathsf{T}(\alpha X + \beta Y)\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{b} + \beta \mathbf{a}^\mathsf{T} Y \mathbf{b} = \alpha\, \eta(X) + \beta\, \eta(Y)$$

   za poljubni matriki $X, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η je torej linearna.

   b. **[15 točk]** Določi $\dim(\ker \eta)$ ter $\dim(\ker \theta)$.
   Rešitev: Velja

$$\eta(E_{11}) = x^2 \ , \ \eta(E_{21}) = x \ \text{ in } \ \eta(E_{31}) = 1,$$

   kjer so E_{ij} standardne bazne matrike $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Ker $\mathrm{im}\eta$ vsebuje bazo $\mathbb{R}_2[x]$, je $\mathrm{im}\eta = \mathbb{R}_2[x]$. Torej $\dim(\mathrm{im}\eta) = 3$ in $\dim(\ker \eta) = \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) - \dim(\mathrm{im}\eta) = 9 - 3 = 6$.

   Pri θ takoj vidimo, da je edina rešitev enačbe $\theta(p) = 0$ (z matriko 0 na desni) polinom $p = 0$. Torej je $\dim(\ker \theta) = 0$.

   c. **[10 točk]** Ali je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$?
   Rešitev: Pišimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

   Potem je

$$(\theta \circ \eta)(X) = \theta(\eta(X)) = \begin{bmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ d+e+f & d+e+f & d+e+f \\ g+h+i & g+h+i & g+h+i \end{bmatrix}.$$

   Posebej je

$$(\theta \circ \eta)\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   kar pomeni, da je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$.

2. **[35 točk]** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ omejeno območje nad ravnino $z = 0$, ki ga dobimo, če valj $x^2+y^2 = 1$ odrežemo s sfero $x^2+y^2+z^2 = 2$, tj. območje med krogom $x^2 + y^2 \le 1$ v xy-ravnini ter grafom funkcije $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Izračunaj maso telesa, ki ga določa D, če je gostota v točki (x, y, z) enaka

$$\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2.$$

Rešitev: Izračunajmo pripadajoč trojni integral v cilindričnih koordinatah. Gostota je enaka

$$\rho(r \cos\varphi, r \sin\varphi, z) = 1 + r^2.$$

Masa je torej

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{2-r^2}} (1 + r^2) r\, dz = 2\pi \int_0^1 r(1 + r^2)\sqrt{2 - r^2}\, dr \\ &= -\pi \int_2^1 (3 - t)\sqrt{t}\, dt = \pi \int_1^2 \big(3t^{1/2} - t^{3/2}\big) dt = \frac{4\pi}{5}\big(3\sqrt{2} - 2\big), \end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici uvedli novo spremeljivko $t = 2 - r^2$.

3. **[30 točk]**

   a. **[20 točk]** Naj bo $d > 0$ realno število, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa simetrična pozitivno definitna matrika. Poišči/opiši najmanjšo in največjo vrednost $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T} A\mathbf{x}$ pri pogoju $\|\mathbf{x}\| = d$.
   Namig: Naloge se loti z Lagrangeovo metodo.
   Rešitev: Pripadajoča Lagrangeova funkcija je

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda(\|\mathbf{x}\|^2 - d^2) = \mathbf{x}^\mathsf{T} A\mathbf{x} - \lambda(\|\mathbf{x}\|^2 - d^2),$$

   kjer smo vez $\|\mathbf{x}\| = d$ zaradi lažjega računanja zamenjali z $\|\mathbf{x}\|^2 = d^2$. Kandidati za ekstreme so stacionarne točke Lagrangeeve funkcije. Najprej odvajamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= 2\mathbf{x}^\mathsf{T} A - 2\lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \|\mathbf{x}\|^2 - d^2. \end{aligned}$$

   Če odvod po $\mathbf{x}$ enačimo z $\mathbf{0}^\mathsf{T}$, dobimo $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x}$ je lastni vektor matrike A za lastno vrednost λ. Če odvod po λ enačimo z 0, ugotovimo še, da je ta lastni vektor dolžine d. Stacionarne točke L so torej lastni vektorji matrike A dolžine d. Vstavimo tak lastni vektor $\mathbf{x}$ (s pripadajočo lastno vrednostjo λ) v f:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T} A\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda d^2.$$

   Med temi (največ n) vrednostmi je najmanjša $\lambda_{\min} d^2$, največja pa $\lambda_{\max} d^2$, kjer sta $\lambda_{\min}$ in $\lambda_{\max}$ najmanjša in največja lastna vrednost matrike A.

a. [**10 točk**] Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije f pri pogoju $\|\mathbf{x}\| = d$ v konkretnem primeru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad d = 2.$$

Rešitev: Po (a) moramo poiskati le lastne vrednosti matrike A. V tem primeru sta to $\lambda_1 = \lambda_{\min} = 2 - \sqrt{2}$ ter $\lambda_2 = \lambda_{\max} = 2 + \sqrt{2}$. Najmanjša in največja vrednost funkcije f je torej $\lambda_{\min} d^2 = 8 - 4\sqrt{2}$ ter $\lambda_{\max} d^2 = 8 + 4\sqrt{2}$.